بسم الله الرحمن الرحيم

DISCRET MATHEMATICS 12

Password ن وَ القَلَمِ وَمَا يَسْطُرُونَ

I ❤ gaj www.gaj.ir

Other user

ENG

IR-MCI LTE 00:00 AM 100%

Chats

Special thanks

...typing

همکارانی که تجربهٔ فراوان آن‌ها در تدریس و تألیف پشتوانهٔ این کتاب شد :

همکاران تالیف

With Collaboration

- مهندس محمدرضا حسینی‌فرد .... M. Hoseyni fard
- مهندس محسن اسمعیلی .... M . Esmaeili
- مهندس بهرام جلالی .... B . Jalali
- مهندس نوید اورازانی شجاعی .... N.O. Shojaee
- مهندس محمد صحت‌کار .... M. Sehat kar
- مهندس کیوان دارابی .... K . Darabi

May29

virastarni ke ba deghat va hoseleye bimanand satr be satr ketab ra khandand :

ویراستاران علمی

Editorial Board

- مهندس مریم ساسانی .... M. Sasani
- دکتر پیام طیوب .... Dr . P. tayoub
- دکتر آرمان آشتاب .... Dr . A. Ashtab
- مهندس امین خوانین‌زاده .... A . KHavanin Zadeh
- مهندس ایمان وهابی .... E . Vahabi
- مهندس میثم صمدی .... M. Samadi

Today

کارشناسان خبره‌ای که دانش و تجربهٔ خود را با ما به اشتراک گذاشتند :

کارشناسان علمی

Scientific Expert

- مهندس وجیه‌الله یاوری .... V. Yavari
- مهندس مجید علائی نسب .... M.alae nasab
- مهندس محمد ارباب بهرامی .... M. Arbab bahrami
- مهندس حسین خزائی .... H. khazaee
- مهندس حسین پیرزاد .... H. Pirzad
- مهندس سوگند روشنی .... S. Roshani

Message

طوفانی از کتاب‌های حرفه‌ای در راه است ...

IR-MCI LTE 00:01 AM 100 %

Tweet

Rene Descartes
@Rene 1596

من فکر می‌کنم، پس هستم

I think therefor I am.

Translate Tweet

07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

رنه دکارت ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی پدر فلسفهٔ مدرن و هندسهٔ تحلیلی کسی که فلسفه را از خواب سنگین قرون وسطی بیدار کرد.

4,337 7,412 6,720,310,808

CHAPTER 1

Number Theory

Add another Tweet

17 ... دو عدد متباین

وقتی گفته می‌شود دو عدد متوالی، منظور مقدار اعداد از نظر قدر مطلق است.
بنابراین ۹- و ۱۰ را نیز متوالی فرض می‌کنیم چون علامت نقشی در ب.م.م ندارد.

$(-9,10)=1$ $(-3,-4)=1$ $(2,3)=1$

سایر متباین‌های مهم	
۱ دو عدد فرد متوالی همواره نسبت به هم اول‌اند. $(-11,-13)=1$ $(-5,7)=1$ $(3,5)=1$	$(2k-1,2k+1)=1$
۲ تمام اعداد فرد نسبت به ۲ (و توان‌های ۲) اول‌اند. $(15,32)=1$ $(7,16)=1$ $(3,2)=1$	$(2k+1,2^n)=1$
۳ اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، آن‌گاه نسبت به هم اول‌اند. $(11,29)=1$ $(7,11)=1$ $(3,5)=1$	$(p,q)=1$
۴ تمام اعداد صحیح نسبت به ۱ و ۱- اول‌اند. $(15,\pm1)=1$ $(24,\pm1)=1$ $(2,1)=1$	$(a,\pm1)=1$

دو عدد فرد غیرمتوالی ممکن است نسبت به هم اول یا غیراول باشند:

$(15,25)=5$ $(7,15)=1$ $(3,9)=3$

مینی‌تست

1 حاصل $(2m+1,2)$ برابر با .... است.
A) ۲   B) ۱

2 حاصل $(2^n,2k+1)$ برابر با .... است.
A) ۱   B) ۲

3 ب.م.م دو عدد زوج متوالی برابر با .... است.
A) ۲   B) ۲ یا ۴

4 حاصل $(2m,6m^3)$ برابر با .... است.
A) ۲   B) $2|m|$

5 حاصل (m^2,m^3) برابر با .... است.
A) m^2 B) $|m^2|$

6 حاصل $(3m,2m^2)$ برابر با .... است.
A) $|m|$ B) $6m^2$

7 دو عدد .... نسبت به هم اول‌اند.
A) ۷,۹۱   B) ۴,۹

8 عدد .... نسبت به هرسه عدد ۸۱، ۴۹، ۲۵ اول است.
A) ۲۱   B) ۲۲

9 حاصل $(12,1)$ برابر با .... است.
A) ۱۲   B) ۱

10 حاصل $(a,1)$ برابر با .... است.
A) ۱   B) $|a|$

11 حاصل $(a,-1)$ برابر با .... است.
A) ۱   B) ۱-

12 حاصل $(7,11)$ برابر با .... است.
A) ±1 B) ۱

13 اگر p، q دو عدد اول متمایز باشند، حاصل (p,q) برابر با .... است.
A) ۱   B) $\mathrm{Min}\{p,q\}$

14 حاصل $(n,n+1)$ برابر با .... است.
A) n   B) ۱

15 حاصل $(3k+1,3k+2)$ برابر با .... است.
A) ۱   B) ۱ یا ۳

16 هر دو عدد .... نسبت به هم اول‌اند.
A) زوج متوالی   B) فرد متوالی

17 اگر a مضرب ۶ نباشد آنگاه $(a,6)$ ....
A) الزاماً برابر ۱ است   B) برابر ۱ یا ۲ یا ۳ است

18 اگر a مضرب ۷ نباشد آنگاه $(a,7)$ ....
A) الزاماً برابر ۱ است   B) برابر ۱ یا ۲ ... یا ۶ است

NEXT

1 B   2 A   3 A   4 B   5 A   6 A   7 B   8 B   9 B   10 A   11 A   12 B   13 A   14 B   15 A   16 B   17 B   18 A

مینی‌تست

19 اگر p اول و a عددی صحیح باشد به‌طوری که $p \nmid a$ آنگاه با استفاده از .... می‌توان نشان داد: $(a, p)=۱$

A برهان خلف　B اثبات بازگشتی

20 اگر m زوج باشد، حاصل $(m,۲)$ برابر با .... است.

A ۲ یا ۴　B ۲

21 اگر m فرد باشد، حاصل $(m,۲)$ برابر با .... است.

A ۱　B ۲

22 حاصل $(۵^۹,۹^۵)$ برابر با .... است.

A ۱　B ۵×۹

اگر $(a,b)=۱$ باشد:

23 حاصل $(ab, a+b)$ برابر با .... است.

A ۱　B ۱ یا ۲

24 حاصل $(a, b^۲)$ برابر با .... است.

A ۱　B ۱ یا ۳

25 حاصل $(a+b, a-b)$ برابر با .... است.

A ۱　B ۱ یا ۲

26 حاصل (a, bc) برابر با .... است.

A c　B (a,c)

27 حاصل (a^n, b^m) برابر با .... است.

A ۱　B (m,n)

28 حاصل $(a, a+b)$ برابر با .... است.

A ۱　B ۱ یا ۲

29 حاصل (ab, a^n+b^m) برابر با .... است.

A ۱　B ۱ یا ۲

19 A　20 B　21 A　22 A　23 A　24 A　25 B　26 B　27 A　28 A　29 A

63 کدام یک از اعداد زیر نسبت به هر سه عدد ۲۵ ,۲۷ ,۱۶ اول است؟

۱) ۲۱　۲) ۷۷　۳) ۵۵　۴) ۲۶

64 بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۵k+۱$ و $۵k+۲$ کدام است؟

۱) ۳　۲) ۱ یا ۳　۳) ۱　۴) ۱ یا ۲

65 عدد b را کدام انتخاب کنیم تا به‌ازای هر عدد فرد دلخواه a، تساوی $(a, b)=۱$ برقرار باشد؟

۱) ۶　۲) ۸　۳) ۷　۴) ۲۵

66 اگر p یک عدد اول دو رقمی باشد، حاصل $(۱۰۸, ۵p^۲)$ کدام است؟

۱) $۵p^۲$　۲) ۱۰۸　۳) ۱　۴) $p^۲$

67 اگر $(a, b)=۱$ باشد، حاصل $(۳a^۲b, ۳ab^۲)$ برابر با .... است.

۱) $۳|ab|$　۲) ۳　۳) $۹a^۲b^۲$　۴) $۳a^۲b^۲$

68 اگر $۱۹ \nmid a$ حاصل $(۷a, ۱۹^۲)$ کدام است؟

۱) ۷　۲) ۱　۳) ۱۹　۴) ۷×۱۹

69 حاصل $(۶a+۱, ۱۲)$ کدام است؟

۱) ۱ یا ۳　۲) ۱　۳) ۴　۴) ۱ یا ۱۲

70 حاصل $\big((۱۵a+۲, ۴۵), ۹a+۳\big)$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۱ یا ۳　۳) ۱ یا ۵　۴) ۳

71 اگر $(a, ۲)=۱$ باشد، حاصل $(۲a, a^۲+۸)$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۱ یا ۲　۳) ۱ یا ۳　۴) ۱ یا ۳ یا ۹

72 اگر $(a, ۳)=۱$ باشد، حاصل $(۳a, a+۳)$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۱ یا ۳　۳) ۱ یا ۵　۴) ۳ یا ۶

73 اگر $(a, ۵)=۱$ باشد، حاصل $(a+۵, a-۵)$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۱ یا ۵　۳) ۱ یا ۲　۴) ۲ یا ۵

7 کوچک‌ترین مضرب مشترک ۸ و ۶ عبارت است از ....

A ۲ B ۲۴

8 حاصل $[۳,۴]$ برابر با .... است.

A ۱۲ B ۱

9 حاصل $[۳۶,۴۸]$ برابر با .... است.

A ۱۰۸ B ۱۴۴

10 حاصل $[۸,۱۶]$ برابر با .... است.

A ۱۶ B ۸

11 حاصل $[۸,۱]$ برابر با .... است.

A ۸ B ۱

12 حاصل $[۱۵,[۱۰,۸]]$ برابر با .... است.

A ۱۲۰ B ۲۴۰

13 حاصل $[-۱۰,[-۶,۴]]$ برابر با .... است.

A ۱۲۰ B ۶۰

14 حاصل $[a,۱]$ برابر با .... است.

A ۱ B $|a|$

15 حاصل $[a,-۱]$ برابر با .... است.

A ۱ B $|a|$

16 حاصل $[a,a]$ برابر با .... است.

A $|a|$ B ۱

17 حاصل $[a,a^n]$ برابر با .... است.

A $|a|^n$ B $|a|$

18 اگر a,b نسبت به‌هم اول باشند $[a,b]$ برابر با .... است.

A ۱ B $|ab|$

19 حاصل $[-a,b]$ برابر با .... است.

A $-[a,b]$ B $[a,b]$

20 حاصل $[-a,-b]$ برابر با .... است.

A $[a,b]$ B $-[a,b]$

21 اگر $a \mid b$ حاصل $[a,b]$ برابر با .... است.

A $|a|$ B $|b|$

22 اگر $[a,b]=|a|$ باشد آنگاه ....

A $a \mid b$ B $b \mid a$

23 اگر $[a,b]=c$ حاصل $[a,c]$ برابر با .... است.

A c B $|a|$

24 حاصل $[[a,-b],-a]$ برابر با .... است.

A $[a,b]$ B $|a|$

25 حاصل $[a,(a,b)]$ برابر با .... است.

A $[a,b]$ B $|a|$

26 حاصل $(a,[a,b])$ برابر با .... است.

A $[a,b]$ B $|a|$

27 حاصل $[a,[a,b]]$ برابر با .... است.

A $|a|$ B $[a,b]$

28 حاصل $[(۱۳۹۷,۲۰۱۹),۱۳۹۷]$ برابر با .... است.

A ۱۳۹۷ B ۲۰۱۹

29 حاصل $([۱۳۹۸,۲۰۲۰],۱۳۹۸)$ برابر با .... است.

A ۲۰۲۰ B ۱۳۹۸

30 حاصل $[۱۸,[۱۲,۱۸]]$ برابر با .... است.

A ۳۶ B ۱۴۴۴

31 حاصل $[(m^3,m^2),m]$ برابر با .... است.

A $|m^3|$ B m^2

32 حاصل $([m^3,m^2],m)$ برابر با .... است.

A m^2 B $|m|$

33 حاصل $([-m^3,m^2],(m^2,m^4))$ برابر با .... است.

A m^2 B m^4

34 اگر $a \mid b$ کدام نتیجه درست است؟

A $[a,b^2]=b^2$ B $[a^2,b]=|b|$

35 اگر $c \mid ab$ حاصل $[a,c]$ برابر با .... است.

A $|c|$ B $|a|$

36 اگر $a \mid a+b$ حاصل $[a+b,b]$ برابر با .... است.

A $|b|$ B $|a+b|$

37 اگر $[a,b]=c$ باشد، حاصل $[ab,c^2]$ برابر با .... است.

A $|ab|$ B c^2

38 اگر $[a,b]=c$ باشد، حاصل $[ac,c^2]$ برابر با .... است.

A c B c^2

7 B | 8 A | 9 B | 10 A | 11 A | 12 A | 13 B | 14 B | 15 B | 16 A | 17 A | 18 B | 19 B | 20 A | 21 B | 22 B | 23 A | 24 A
25 B | 26 B | 27 B | 28 A | 29 B | 30 A | 31 B | 32 B | 33 A | 34 A | 35 A | 36 A | 37 B | 38 B

85 کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $A=\{x>0 : 24|x , 18|x\}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۷۲ ۴) ۴۳۲

86 حاصل $([a,-1],a^2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $|a|$ ۳) a^2 ۴) -1

87 اگر $b^2 \mid a^3$ کدام نتیجه‌گیری الزاماً صحیح **نیست**؟

۱) $(a,b)=|a|$ ۲) $[a,b]=|b|$ ۳) $[a,b^2]=b^2$ ۴) $(a^2,b)=a^2$

88 با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[(627,429),154]$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

89 اگر m یک عدد طبیعی باشد، حاصل $[[m^2,m],2m^3]$ برابر با .... است.

۱) $2m^3$ ۲) m^3 ۳) m^4 ۴) m

90 اگر $(a^2,b)=a^2$ باشد، حاصل $[a,2b^3]$ برابر با .... است.

۱) $2ab^3$ ۲) a ۳) $2b^3$ ۴) a^2

91 اگر $a=3k+1$ باشد، حاصل $[(a,a+3),[a,a+3]]$ برابر با .... است.

۱) $a(a+3)$ ۲) a ۳) $\frac{a(a+3)}{3}$ ۴) $a+3$

21 چاقی و لاغری در ب.م.م و ک.م.م

می‌دانیم ب.م.م هر دو عدد، هر یک از اعداد را می‌شمارد و ک.م.م هر دو عدد، بر هر یک از اعداد بخش پذیر است:

ادامهٔ لورل - هاردی در ب.م.م و ک.م.م		
۱ گرفتن ب.م.م بین دو عدد باعث لاغر شدن می‌شود، یعنی برای هر عدد دلخواه a عدد $(a,\bigcirc)$ همواره لاغرتر از a است.	$a\mid(b,\bigcirc)\xrightarrow[\text{چاق‌تر}]{\text{چاق}}a\mid b$	$a\mid b\xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}}(a,\bigcirc)\mid a$
۲ گرفتن ک.م.م بین دو عدد باعث چاق شدن می‌شود، یعنی برای هر عدد دلخواه a عدد $[a,\bigcirc]$ همواره چاق‌تر از a است.	$[a,\bigcirc]\mid b\xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}}a\mid b$	$a\mid b\xrightarrow[\text{چاق‌تر}]{\text{چاق}}a\mid[b,\bigcirc]$
۳ می‌دانیم $[a,b]\times(a,b)=a\times b$ یعنی حاصل ضرب دو عدد همواره چاق‌تر از ک.م.م دو عدد است.	$a\times b\mid c\xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}}[a,b]\mid c$	$c\mid[a,b]\xrightarrow[\text{چاق‌تر}]{\text{چاق}}c\mid a\times b$

مینی تست

1 کدام نتیجه‌گیری درست است؟

A) $a\mid b\Rightarrow a\mid(b,c)$ B) $a\mid b\Rightarrow(a,c)\mid b$

2 کدام نتیجه‌گیری درست است؟

A) $a\mid(b,c)\Rightarrow a\mid b$ B) $(b,c)\mid a\Rightarrow b\mid a$

3 کدام نتیجه‌گیری درست است؟

A) $a\mid b\Rightarrow a\mid[b,c]$ B) $a\mid b\Rightarrow[a,c]\mid b$

4 کدام نتیجه‌گیری درست است؟

A) $[b,c]\mid a\Rightarrow b\mid a$ B) $a\mid[b,c]\Rightarrow a\mid b$

5 کدام نتیجه‌گیری درست است؟

A) $a\mid(b,c)\Rightarrow a\mid[b,c]$ B) $a\mid[b,c]\Rightarrow a\mid(b,c)$

6 کدام نتیجه‌گیری درست است؟

A) $(a,b)\mid c\Rightarrow[a,b]\mid c$ B) $[a,b]\mid c\Rightarrow(a,b)\mid c$

7 کدام نتیجه‌گیری درست است؟

A) $a\mid[b,c]\Rightarrow a\mid bc$ B) $a\mid bc\Rightarrow a\mid[b,c]$

8 کدام نتیجه‌گیری درست است؟

A) $ab\mid c\Rightarrow[a,b]\mid c$ B) $[a,b]\mid c\Rightarrow ab\mid c$

1 B 2 A 3 A 4 A 5 A 6 B 7 A 8 A

3 اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه ....

A $ac \overset{m}{\equiv} b$ B $ac \overset{m}{\equiv} bc$

4 اگر $5 \overset{9}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ $2a$ بر ۹ برابر با .... است.

A ۱ B ۸

5 اگر $4 \overset{7}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ $a + 9$ بر ۷ برابر با .... است.

A ۱ B ۶

6 اگر $5 \overset{17}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ $6a + 3$ بر ۱۷ برابر با .... است.

A ۱ B ۱۶

7 اگر $-3 \overset{9}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ $7a + 2$ بر ۹ برابر با .... است.

A ۱ B ۸

8 اگر $6 \overset{9}{\equiv} a, b \overset{9}{\equiv} 7$ باشد، باقی‌ماندهٔ $a + b$ بر ۹ برابر با .... است.

A ۵ B ۴

9 اگر $5 \overset{7}{\equiv} a, b \overset{7}{\equiv} 4$ باشد، باقی‌ماندهٔ ab بر ۷ برابر با .... است.

A ۱ B ۶

10 اگر $4 \overset{8}{\equiv} a$ و $5 \overset{8}{\equiv} b$ باشد، باقی‌ماندهٔ $a + b - ab$ بر ۸ برابر با .... است.

A ۵ B ۳

11 اگر $a = 23k - 7$ و $b = 23k' + 4$ باشد، ....

A $2a - 3b \overset{23}{\equiv} 20$ B $2a - 3b \overset{23}{\equiv} 3$

12 اگر $4 \overset{7}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ a^2 بر ۷ برابر با .... است.

A ۹ B ۲

13 اگر $7 \overset{9}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ a^4 بر ۷ برابر با .... است.

$a \overset{9}{\equiv} 7 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} -2 \Rightarrow$ ....

A ۵ B ۷

14 اگر $11 \overset{12}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ a^9 بر ۱۲ برابر با .... است.

A ۱ B ۱۱

15 اگر $29 \overset{15}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ a^{1399} بر ۱۵ برابر با .... است.

A ۱ B ۱۴

16 اگر $26 \overset{9}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ a^{1398} بر ۹ برابر با .... است.

A ۱ B ۸

17 باقی‌ماندهٔ 15^6 بر ۱۳ برابر با .... است.

A ۱ B ۱۲

18 باقی‌ماندهٔ 25^{451} بر ۱۳ برابر با .... است.

A ۱ B ۱۲

19 باقی‌ماندهٔ $6^{17} + 8^{17}$ بر ۷ برابر با .... است.

A صفر B ۲

20 باقی‌ماندهٔ $15^4 + 12^4$ بر ۱۳ برابر با .... است.

A ۳ B ۴

21 اگر $3 \overset{6}{\equiv} a$ و $2 \overset{6}{\equiv} b$ باشد، باقی‌ماندهٔ $3a^2 + 2b^3$ بر ۶ برابر با .... است.

A ۱ B ۵

22 اگر $14 \overset{15}{\equiv} a$ و $31 \overset{15}{\equiv} b$ باشد، باقی‌ماندهٔ $a^{17} + b^{16}$ بر ۱۵ برابر با............است.

A صفر B ۲

23 اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \mid m$ باشد .... است.

A $a \overset{n}{\not\equiv} b$ B $a \overset{n}{\equiv} b$

24 اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۲۴ برابر ۱۷ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر .... نیز معلوم است.

A ۱۶ B ۱۲

25 اگر $5 \overset{12}{\equiv} a$ باشد آنگاه ....

A $a \overset{6}{\equiv} 5$ B $a \overset{6}{\equiv} 1$

26 اگر $15 \overset{91}{\equiv} a$ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۷ برابر با .... است.

A ۱ B ۶

27 اگر $4 \overset{2}{\equiv} 2x$ آنگاه ....

A $x \overset{2}{\equiv} 1$ B $x \overset{2}{\equiv} 2$

28 اگر $4 \overset{6}{\equiv} 2x$ آنگاه ....

A $x \overset{6}{\equiv} 2$ B $x \overset{3}{\equiv} 2$

29 اگر $9y \overset{15}{\equiv} 6x$ باشد، آنگاه ....

A $2x \overset{5}{\equiv} 3y$ B $2x \overset{15}{\equiv} 3y$

30 از رابطهٔ هم‌نهشتی $15a \overset{30}{\equiv} 20b$ می‌توان نتیجه گرفت ....

A $3a \overset{30}{\equiv} 4b$ B $3a \overset{6}{\equiv} 4b$

31 از رابطهٔ هم‌نهشتی $3a \overset{6}{\equiv} 4b$ می‌توان نتیجه گرفت ....

A $b \overset{2}{\equiv} 0$ B $b \overset{3}{\equiv} 0$

32 از رابطهٔ هم‌نهشتی $3a \overset{6}{\equiv} 4b$ می‌توان نتیجه گرفت ....

A $a \overset{2}{\equiv} 0$ B $a \overset{3}{\equiv} 0$

33 اگر $18a \overset{9}{\equiv} 12b$ آنگاه ....

A $a \overset{3}{\equiv} 1$ B $b \overset{3}{\equiv} 0$

34 اگر $15x \overset{5}{\equiv} 7y$ آنگاه ....

A $x \overset{5}{\equiv} 0$ B $y \overset{5}{\equiv} 0$

35 اگر $5a \overset{7}{\equiv} 1$ آنگاه ....

A $a \overset{7}{\equiv} 3$ B $a \overset{7}{\equiv} 2$

36 اگر $2a \overset{7}{\equiv} -1$ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۷ برابر با .... است.

A ۳ B ۴

37 اگر $3a \overset{8}{\equiv} 2$ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۸ برابر با .... است.

A ۶ B ۲

38 اگر $7a \overset{11}{\equiv} 2$ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۱۱ برابر با .... است.

A ۵ B ۷

39 اگر $23a \overset{12}{\equiv} 15$ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۱۲ برابر با .... است.

A ۳ B ۹

3 B | 4 A | 5 B | 6 B | 7 B | 8 B | 9 B | 10 A | 11 A | 12 B | 13 B | 14 B | 15 B | 16 A | 17 B | 18 B | 19 A | 20 B | 21 A | 22 A

23 B | 24 B | 25 A | 26 A | 27 B | 28 B | 29 A | 30 B | 31 B | 32 A | 33 B | 34 B | 35 A | 36 A | 37 A | 38 A | 39 B

143 از رابطهٔ هم‌نهشتی $15a \overset{30}{\equiv} 20b$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $3a \overset{30}{\equiv} 4b$ ۲) $3a \overset{6}{\equiv} 4b$ ۳) $b \overset{3}{\equiv} 0$ ۴) $a \overset{2}{\equiv} 0$

144 از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۹) $18a \equiv 12b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (خارج - ۸۵)

۱) (پیمانهٔ ۲) $a \equiv 0$ ۲) (پیمانهٔ ۳) $b \equiv 0$ ۳) (پیمانهٔ ۳) $3a \equiv b$ ۴) (پیمانهٔ ۳) $3a \equiv 2b$

145 از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۸۴) $36a \equiv 192$، کدام نتیجه‌گیری در پیمانهٔ ۷ نادرست است؟ (داخل - ۸۸)

۱) $a \equiv 3$ ۲) $a \equiv 4$ ۳) $2a \equiv -1$ ۴) $3a \equiv 2$

146 از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۱۸) $9a \equiv 6b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (داخل - ۸۷)

۱) (پیمانهٔ ۲) $a \equiv 0$ ۲) (پیمانهٔ ۳) $b \equiv 0$ ۳) (پیمانهٔ ۶) $a \equiv 2$ ۴) (پیمانهٔ ۶) $3a \equiv 2b$

147 اگر $a^2 - 1 \overset{m}{\equiv} a^3 - a^2 - a + 1$ و $(a^2 - 1, m) = 1$ آن‌گاه:

۱) $m \mid a-2$ ۲) $m \mid a-1$ ۳) $m \mid a+1$ ۴) $m \mid a+2$

148 اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۷ برابر ۱۱ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $100 - 3a$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۱۳ ۴) ۹

149 اگر $a = 7k - 3$ و $b = 7k' + 2$ آن‌گاه باقی‌ماندهٔ $ab - 3a + 4$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

150 اگر $a = 17k + 33$ باشد، باقی‌ماندهٔ $a^5 + 27$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۷

151 اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۹ به‌ترتیب ۳ و ۵ باشد، عدد $3a^2 - 5ab + b^3$ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی در پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۱) [۳] ۲) [۶] ۳) [۵] ۴) [۸]

152 اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۱ برابر ۲۷ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

35 ترکیب تقسیم و هم‌نهشتی

در مسائل تقسیم اگر بگویند مقسوم، مضرب فلان عدد است، بهتر است مسأله به کمک هم‌نهشتی حل شود؛ یعنی عبارت $a = bq + r$ را در پیمانهٔ داده شده، برابر صفر می‌گذاریم. در این مسائل اگر صحبت از کوچک‌ترین مقدار a یا b شد، حتماً از شرط تقسیم $[0 \le r < b]$ باید استفاده کرد.

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت و باقی‌مانده به‌ترتیب ۱۶ و ۲۳ هستند. اگر a مضرب ۱۷ باشد، کوچک‌ترین مقدار b کدام است؟

$$a = b \times 16 + 23 \xrightarrow[\text{a مضرب ۱۷ است.}]{a \overset{17}{\equiv} 0} 16b + 23 \overset{17}{\equiv} 0 \Rightarrow -b + 6 \overset{17}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{17}{\equiv} 6 \Rightarrow b = 17k + 6$$

حال برای یافتن کوچک‌ترین مقدار b، می‌گوییم باید $b > r$ باشد $(r = 23)$:

$$17k + 6 > 23 \Rightarrow 17k > 17 \Rightarrow \mathrm{Min}(k) = 2 \Rightarrow \mathrm{Min}(b) = (17 \times 2) + 6 = 40$$

در بعضی از مسائل تقسیم، علاوه بر این‌که گفته می‌شود مقسوم یعنی a، مضرب فلان عدد است، برای مقسوم شرط‌هایی مانند دو رقمی، سه رقمی و ... نیز قائل می‌شوند و تعداد جواب‌های ممکن را از ما می‌خواهند. در این نوع مسائل بعد از استفاده از هم‌نهشتی و یافتن جنس b برحسب پیمانه، از شرط تقسیم و شرط داده شده استفاده می‌کنیم و با اشتراک‌گیری از آن‌ها تعداد حالات ممکن برای b را پیدا می‌کنیم.

در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۸ و باقی‌مانده ۱۱ است. اگر عدد a مضرب ۷ و کوچک‌تر از ۲۰۰ باشد، تعداد جواب‌های a کدام است؟

$$a = (b \times 8) + 11 \xrightarrow{a \overset{7}{\equiv} 0} \cancel{8}^{1} b + \cancel{11}^{4} \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow b + 4 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{7}{\equiv} -4 \Rightarrow b = 7k - 4$$

حال باید دو شرط را برای یافتن تعداد جواب‌های ممکن برای b در نظر بگیریم:

۱ $b > r \Rightarrow 7k - 4 > 11 \Rightarrow 7k > 15 \Rightarrow k \ge 3$

۲ $a < 200 \Rightarrow 8b + 11 < 200 \Rightarrow 8b < 189 \Rightarrow b \le 23 \Rightarrow 7k - 4 \le 23 \Rightarrow 7k \le 27 \Rightarrow k \le 3/..$

حال با اشتراک ۱ و ۲ معلوم می‌شود تنها $k = 3$ قابل قبول است، یعنی برای a نیز یک جواب وجود دارد که برابر است با:

$$k = 3 \Rightarrow b = (7 \times 3) - 4 = 17 \Rightarrow a = (17 \times 8) + 11 = 136 + 11 = 147 \Rightarrow \text{یک جواب}$$

42 مسائل باقی‌مانده با توان پارامتری

در محاسبه باقی‌ماندهٔ اعداد توان‌دار بر یک عدد طبیعی اگر توان پارامتری بود، ابتدا کوچک‌ترین توان از پایه را پیدا می‌کنیم که باقی‌ماندهٔ آن در پیمانه داده‌شده برابر ۱ یا ۱- باشد. سپس با به توان رساندن مناسب سعی می‌کنیم توان مجهول را پیدا کنیم.

شکل کلی n هایی را پیدا کنید که 2^n+1 بر ۶۵ بخش پذیر باشد.

$$2^n+1\overset{65}{\equiv}0\Rightarrow 2^n\overset{65}{\equiv}-1$$

بنابراین باید توانی از ۲ را پیدا می‌کنیم که در پیمانه ۶۵ برابر ۱- باشد و ...

$$2^6\overset{65}{\equiv}-1\Rightarrow(2^6\overset{65}{\equiv}-1)^{2k+1}\Rightarrow 2^{12k+6}\overset{65}{\equiv}-1\Rightarrow n=12k+6$$

در محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ اعداد توان‌دار بر یک عدد طبیعی، اگر توان دو تا از پایه‌ها پارامتری بود ابتدا از پایه کوچک‌تر فاکتور می‌گیریم و طرفین رابطهٔ هم‌نهشتی را بر آن تقسیم می‌کنیم تا به یک عدد با توان پارامتری برسیم. سپس همانند مسأله قبلی عمل می‌کنیم.

شکل کلی nهایی را پیدا کنید که 12^n-3^n مضرب ۱۷ باشد.

ابتدا داده مسئله را کمی ساده می‌کنیم:

$$12^n-3^n\overset{17}{\equiv}0\Rightarrow 3^n(4^n-1)\overset{17}{\equiv}0\xrightarrow[(3^n,17)=1]{\div 3^n}4^n-1\overset{17}{\equiv}0\Rightarrow 4^n\overset{17}{\equiv}1$$

بنابراین باید توانی از ۴ را پیدا کنیم که در پیمانه ۱۷ برابر ۱ یا ۱- شود و ...

$$4^2\overset{17}{\equiv}-1\Rightarrow(4^2\overset{17}{\equiv}-1)^{2k}\Rightarrow 4^{4k}\overset{17}{\equiv}1\Rightarrow n=4k$$

مینی تست

1 می‌دانیم $2^6\overset{65}{\equiv}-1$ بنابراین اگر $2^n+1\overset{65}{\equiv}0$ باشد، n به‌صورت .... است.

A) $12k$ B) $12k+6$

2 می‌دانیم $2^5\overset{31}{\equiv}1$ بنابراین اگر $2^n-1\overset{31}{\equiv}0$ باشد، n به‌صورت .... است.

A) $5k$ B) $10k+5$

3 اگر $10^n-5^n\overset{7}{\equiv}0$ باشد، آنگاه:

A) $2^n\overset{7}{\equiv}1$ B) $2^n\overset{7}{\equiv}-1$

4 اگر $2^n+1\overset{9}{\equiv}0$ باشد، nبه‌صورت .... است.

A) $2k$ B) $6k+3$

1 B 2 A 3 A 4 B

183 تعداد اعضای مجموعهٔ $A=\{n:65\mid 2^n+1\}$ از مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

184 به‌ازای چند عدد طبیعی n کوچک‌تر از ۵۰، عدد $42+7^n$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است؟ (داخل-۹۲)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

185 اگر عدد $37+7^n$ مضرب ۱۹ باشد، برای n چند جواب مربع کامل دو رقمی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

186 اگر 10^n-5^n مضرب ۱۷ باشد، برای n چند جواب دو رقمی وجود دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۲۵

187 اگر عدد (6^n-3^n) مضرب ۲۵ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی n کدام است؟ (داخل-۹۱)

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

188 تعداد اعداد دو رقمی a به‌طوری که $11^a\overset{19}{\equiv}1$ کدام است؟ (خارج-۹۴)

۱) ۲۵ ۲) ۲۷ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

189 اگر $A=1!+2!+3!+...+100!$ و عدد A^n+1 مضرب ۷ باشد، برای n چند جواب دو رقمی کوچک‌تر از ۵۰ وجود دارد؟ (داخل-۹۱)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

NOTE

46 ... معادلات همنهشتی

بعضی از معادلات هم‌نهشتی درجهٔ ۲ با پیمانهٔ مرکب طوری طراحی شده‌اند که هر یک از عبارت‌های درجه اول موجود در تجزیه عبارت درجهٔ ۲، دقیقاً بر یکی از عامل‌های موجود در پیمانه بخش‌پذیر است. مثلاً ممکن است پیمانه ۶ باشد و عبارت‌های درجهٔ اول طوری طراحی شده باشند که یکی از آن‌ها هرگز مضرب ۲ و دیگری هرگز مضرب ۳ نشود. در این شرایط برای این که کل عبارت مضرب ۶ شود، معلوم است که کدام یک از دو عبارت باید مضرب ۲ و کدام یک مضرب ۳ شود. در این تیپ مسائل، ابتدا هر یک از معادله‌های هم‌نهشتی درجه اول را حل می‌کنیم و سپس دو پیمانه را یکی می‌کنیم.

در معادلهٔ $(2x+1)(5x+2) \overset{10}{\equiv} 0$ مقدار x کدام است؟

دقت کنید که $10 = 2\times 5$، از طرفی عبارت $2x+1$ فرد است و بر ۲ بخش‌پذیر نیست، عبارت $5x+2$ نیز معلوم است که نمی‌تواند مضرب ۵ باشد؛ بنابراین باید دو معادلهٔ $2x+1 \overset{5}{\equiv} 0$ و $5x+2 \overset{2}{\equiv} 0$ را حل کنیم:

$$5x+2 \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow 5x \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{2}{\equiv} 2$$

$$2x+1 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} -1 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$x \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 10k+2$$

مینی تست

1 اگر $3 \overset{5}{\equiv} 7x$ باشد، آنگاه ....

A) $x = 5k-1$ B) $x = 5k+1$

2 اگر $7 \overset{11}{\equiv} 9x$ باشد، آنگاه ....

A) $x = 11k-2$ B) $x = 11k+2$

3 اگر $20 \overset{6}{\equiv} 23x$ باشد، آنگاه ....

A) $x = 6k-2$ B) $x = 6k+2$

4 اگر $12 \mid 5x-7$ باشد، آنگاه ....

A) $x = 12k+1$ B) $x = 12k-1$

5 اگر $27 \overset{5}{\equiv} 18x$ باشد، آنگاه کوچک‌ترین عدد دو رقمی x برابر با ....است.

A) ۱۱ B) ۱۴

6 اگر $(x-1)(x+2) \overset{7}{\equiv} 0$ باشد، آنگاه ....

A) $x = 7k+1$ یا $x = 7k-2$ B) $x = 7k+2$ یا $x = 7k-4$

1 A 2 B 3 A 4 B 5 B 6 A

206 معادله هم‌نهشتی $10x \overset{13}{\equiv} 7$ در مجموعه اعداد دو رقمی چند جواب دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

207 به ازای بعضی از مقادیر $n \in N$ اگر $\alpha \mid 11n+3$ و $\alpha \mid 5n+4$ و $\alpha \neq 1$، آنگاه تعداد اعداد دو رقمی n در این حالت کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

208 به ازای بعضی از مقادیر $n \in N$ اگر $\alpha \mid 13n+3$ و $\alpha \mid 7n+4$ و $\alpha \neq 1$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

209 اگر عدد $2x^2-x-6$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی x کدام است؟ (داخل - ۹۴)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

210 اگر عدد $3x^2-5x-2$ مضرب ۴۱ باشد، مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد دو رقمی x کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

211 اگر $6x^2-x-1$ مضرب ۶ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد دو رقمی x کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

212 اگر $x^2-x \overset{4}{\equiv} 2$ برای x چند جواب طبیعی کم‌تر از ۲۰ وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۷

47 کاربرد معادلهٔ همنهشتی

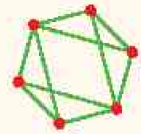
اگر طرف چاق یک بخش‌پذیری یک عبارت پارامتری و طرف لاغر یک عدد معلوم باشد، بهتر است برای پیدا کردن مقادیر پارامتر، بخش‌پذیری را به هم‌نهشتی تبدیل کنیم و از حل معادلهٔ هم‌نهشتی برای پیدا کردن پارامتر استفاده می‌کنیم:

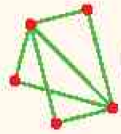
$$a \mid f(n) \Rightarrow f(n) \overset{a}{\equiv} 0$$

NEXT

مینی‌تست

27 در گراف .... دو رأس فول وجود دارد.

A 

B 

28 یک گراف .... هم رأس فول و هم رأس ایزوله داشته باشد.

A می‌تواند　　B نمی‌تواند

29 در گرافی با p رأس، یک رأس از درجهٔ $p-1$ است. این گراف .... ندارد.

A رأس درجهٔ ۲　　B رأس ایزوله

30 اگر در یک گراف از مرتبهٔ p دو رأس از درجهٔ $p-1$ وجود داشته باشد، درجهٔ سایر رأس‌ها، .... است.

A دقیقاً ۲　　B حداقل ۲

31 در گراف‌های ساده درجهٔ دو رأس .... یکسان باشد.

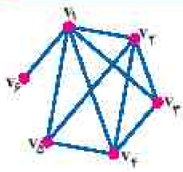
A می‌تواند　　B نمی‌تواند

32 در هر گراف ساده، درجهٔ ....

A حداقل دو رأس یکسان است

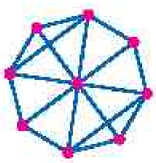
B هیچ دو رأسی یکسان نیست

27 B 28 B 29 B 30 B 31 A 32 A



247 در شکل مقابل، نمودار گراف G داده شده است. اختلاف تعداد رأس‌های زوج و رأس‌های فرد گراف کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۱
۳) صفر　　۴) ۴



248 در گراف G مطابق شکل حاصل $\Delta(G)-\delta(G)$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۳
۳) ۶　　۴) ۵

249 در گراف ساده‌ای با ۸ رأس اگر مینیمم درجهٔ رأس‌های گراف ۳ باشد، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

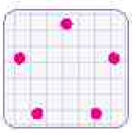
۱) ۲۲　　۲) ۲۳　　۳) ۲۴　　۴) ۲۵

250 در گراف سادهٔ $G=(V,E)$، دو رأس از درجهٔ $\delta=1$ وجود دارد. اگر مرتبهٔ گراف ۹ باشد، گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۱　　۲) ۲۲　　۳) ۲۳　　۴) ۲۴

251 در گراف ساده‌ای با ۱۲ یال اگر ماکزیمم درجهٔ رأس‌ها ۵ باشد، حداقل تعداد اعضای مجموعهٔ V کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸



252 در گراف سادهٔ G با ۵ رأس، اگر $\Delta(G)=4$ و $\delta(G)=2$ باشد، .... یال وجود دارد.

۱) حداقل ۵　　۲) حداکثر ۸
۳) حداکثر ۷　　۴) حداقل ۷

253 حاصل ضرب درجات رأس‌های یک گراف برابر ۷ است. این گراف حداقل چند رأس دارد؟

۱) ۱۴　　۲) ۷　　۳) ۸　　۴) چنین گرافی وجود ندارد

254 حاصل‌ضرب درجات رأس‌های گراف G برابر ۱۳ است. حاصل $\Delta(G)-\delta(G)$ کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۳　　۳) ۲　　۴) ۱

255 در یک گراف ساده با ۹ رأس و ۶ یال حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

256 در یک گراف ساده با ۱۰ رأس و ۱۱ یال حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

257 در یک گراف ساده از مرتبهٔ ۱۲ و اندازهٔ ۴ حداقل چند رأس ایزوله وجود دارد؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

258 در گراف ساده‌ای از مرتبهٔ ۲۰ اندازه برابر ۵ است. این گراف حداقل چند رأس ایزوله دارد؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۱۴　　۴) ۱۵

مینی‌تست

6 هر گراف .... یک گراف .... است.

A) کامل - منتظم　　B) منتظم - کامل

7 هر گراف .... الزاماً یک گراف .... نیست.

A) کامل - منتظم　　B) منتظم - کامل

8 گراف G که در آن .... تمام رأس‌های آن برابر با $V(G)$ باشد، .... است.

A) همسایگی باز - منتظم　　B) همسایگی بسته - کامل

9 درجهٔ همهٔ رأس‌های گراف K_p برابر با .... است.

A) $p-1$　　B) p

10 در گراف .... درجهٔ همهٔ رأس‌ها ۵ است.

A) K_5　　B) K_6

11 هر گراف .... از مرتبهٔ p یک گراف کامل است که آن را با K_p نشان می‌دهند.

A) $(p-1)$-منتظم　　B) p-منتظم

12 گراف ۳ - منتظم مرتبهٔ ۴ را با .... نشان می‌دهند.

A) K_3　　B) K_4

13 اندازهٔ گراف کامل مرتبهٔ p از رابطهٔ .... به دست می‌آید.

A) $\frac{p(p-1)}{2}$　　B) $\frac{p(p+1)}{2}$

14 اندازهٔ گراف K_4 برابر .... است.

A) ۶　　B) ۴

15 اندازهٔ گراف K_5 برابر .... است.

A) ۱۰　　B) ۱۵

16 اندازهٔ گراف کاملی برابر ۱۵ است. این گراف .... رأس دارد.

A) ۷　　B) ۶

17 اندازهٔ گراف کاملی برابر ۲۱ است. این گراف .... رأس دارد.

A) ۷　　B) ۸

18 اندازهٔ گراف .... چهار برابر مرتبهٔ آن است.

A) K_8　　B) K_9

19 در گراف کامل .... مرتبه و اندازه برابر است.

A) K_3　　B) K_4

20 در چند گراف کامل مرتبه از اندازه بزرگ‌تر است؟

A) ۳　　B) ۲

6 A　7 B　8 B　9 A　10 B　11 A　12 B　13 A　14 A　15 A　16 B　17 A　18 B　19 A　20 B

277 در گراف کاملی مجموع مرتبه و اندازه ۶ است. این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۵

278 مجموع مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۱۰ است. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۶　　۲) ۵　　۳) ۷　　۴) ۴

279 مجموع مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۱۵ است. این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

280 حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۲۴ است. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۶　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۷

281 حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۵۰ است. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۱۰　　۲) ۵　　۳) ۲۵　　۴) ۱۵

282 حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۹۰ است. در این گراف درجهٔ رأس‌ها کدام است؟

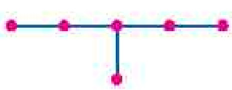
۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۹

283 تفاضل اندازه و مرتبهٔ گراف کاملی ۱۴ است. در این گراف همسایگی باز هر رأس چند عضو دارد؟

۱) ۸　　۲) ۷　　۳) ۶　　۴) ۹

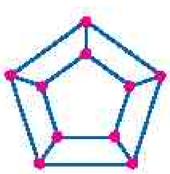
284 تفاضل مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۲۰ است. در این گراف همسایگی بستهٔ هر رأس چند عضو دارد؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸



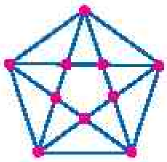
285 گراف مقابل با اضافه شدن چند یال، کامل می‌شود؟

۱) ۱۰　　۲) ۹　　۳) ۸　　۴) ۱۱



286 در گراف مقابل با اضافه شدن چند یال، درجهٔ تمام رأس‌ها برابر ۹ می‌شود؟

۱) ۳۵　　۲) ۲۵　　۳) ۲۰　　۴) ۳۰



287 گراف G مطابق شکل مفروض است، با اضافه شدن چند یال در این گراف $\delta(G)=9$ خواهد شد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۲۰

288 یک گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۶ با اضافه شدن چند یال، به یک گراف ۵- منتظم مرتبهٔ ۶ تبدیل می‌شود؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۷

289 یک گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۸ با اضافه شدن چند یال، همسایگی بستهٔ تمام رأس‌ها یکسان می‌شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

290 یک گراف ۱- منتظم مرتبهٔ ۶ با اضافه شدن چند یال، همسایگی باز تمام رأس‌ها ۵ عضوی خواهد شد؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

291 به گراف ۴- منتظم G، ۱۸ یال اضافه کرده‌ایم تا هر دو رأس متمایزش مجاور شوند. گراف G چند رأس دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

292 گراف سادهٔ با اضافه شدن ۱۳ یال کامل و با کم شدن ۷ یال از آن ۲- منتظم می‌شود. مجموع مرتبه و اندازهٔ این گراف کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

293 اگر مجموعهٔ $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ مجموعهٔ رأس‌های گراف سادهٔ G باشند و دو رأس متمایز با این شرط مجاور باشند که اعداد مربوط به رأس‌های آن‌ها نسبت به هم اول باشند، این گراف با اضافه شدن چند یال کامل می‌شود؟

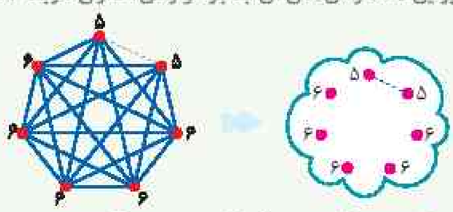
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

10 گراف‌های نزدیک به کامل

اگر اندازهٔ یک گراف نزدیک به یک گراف کامل باشد برای بررسی وضعیت، بهتر است آن را با گراف کامل هم مرتبهٔ خودش، مقایسه کنیم. در این موارد به جای این‌که کل یال‌ها را رسم کنیم از روش نمادین برای رسم گراف استفاده می‌کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

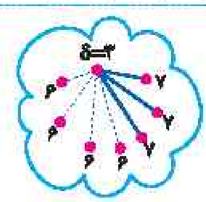
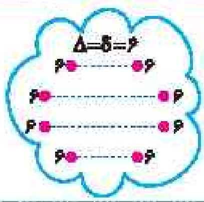
اگر اندازهٔ یک گراف از مرتبهٔ ۷ برابر ۲۰ باشد، این گراف چند رأس از درجهٔ ۵ دارد؟

این گراف یک یال از گراف K_7 کم‌تر دارد. بنابراین همهٔ رأس‌های آن به‌جز دو رأس، دارای درجهٔ $\Delta=6$ و آن دو رأس دارای درجهٔ $\delta=5$ هستند.



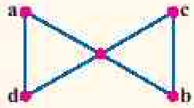
اگر اندازهٔ یک گراف مرتبهٔ ۸ برابر ۲۴ باشد، حداقل و حداکثر مقدار $\Delta-\delta$ را به دست آورید.

این گراف دارای ۲۴ یال است که نزدیک به گراف K_8 است، ولی ۴ یال کم‌تر از K_8 دارد. برای حل این مسئله، ابتدا فرض می‌کنیم که یک گراف کامل مرتبهٔ ۸ داریم. سپس برای یافتن حداکثر و حداقل $\Delta-\delta$ گراف موردنظر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ $Max(\Delta-\delta)$: برای این‌که $\Delta-\delta$ حداکثر شود، باید تا حد امکان Δ زیاد و δ کم شود. برای این منظور هر ۴ یال را از یک رأس برمی‌داریم:	۲ $Min(\Delta-\delta)$: برای این‌که $\Delta-\delta$ حداقل شود باید تا حد امکان Δ و δ به هم نزدیک شوند. برای این منظور یال‌های کنده شده را بین رأس‌ها پخش می‌کنیم:
 $Max(\Delta-\delta)=7-3=4$	 $Min(\Delta-\delta)=6-6=0$

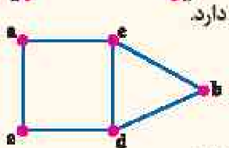
مینی تست

5 در گراف مقابل .... مسیر از a به b وجود دارد.



A ۳ B ۴

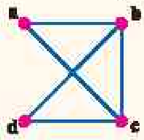
6 در گراف مقابل .... مسیر از a به b وجود دارد.



A ۳

B ۴

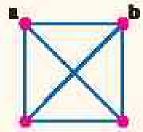
7 در گراف مقابل .... مسیر از a به b وجود دارد.



A ۳

B ۲

8 در گراف زیر، .... مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد.



A ۲

B ۱

9 طول یک مسیر برابر با .... است.

A تعداد یال‌های موجود در آن مسیر B تعداد رأس‌های موجود در آن مسیر

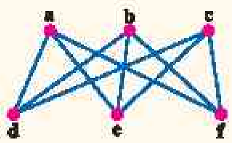
10 طول یک مسیر همواره ....

A یکی کمتر از تعداد رئوس مسیر است B یکی بیشتر از تعداد یال‌های مسیر است

11 اگر abcdef یک مسیر بین دو رأس از گراف G باشد، طول این مسیر برابر .... است.

A ۶ B ۵

12 در گراف شکل زیر، .... به طول ۲ بین a و b وجود دارد.



A ۳ مسیر

B ۶ مسیر

13 در هر گراف، دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأس، ....

A یک مسیر محسوب نمی‌شود B یک مسیر با طول صفر است

14 در گراف G از مرتبهٔ p، طول یک مسیر حداقل برابر با .... است.

A صفر B یک

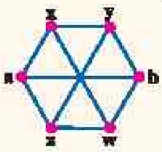
15 در گراف G از مرتبهٔ p، طول یک مسیر بین دو رأس متمایز حداقل برابر با........... است.

A ۱ B ۲

16 گراف G از مرتبهٔ p، طول یک مسیر حداکثر برابر با .... است.

A $p-1$ B p

17 بین دو رأس a و b از گراف زیر، .... به طول ۳ بین a و b وجود دارد.



A ۲ مسیر

B ۴ مسیر

18 اگر گرافی مسیری به طول ۵ داشته باشد، ....

A تمام مسیرهای با طول ۰ تا ۵ را دارد

B ممکن است بعضی از مسیرهای به طول ۰ تا ۵ را نداشته باشد

19 اگر در گراف G داشته باشیم: $\delta(G) \geq k$، آن‌گاه گراف G ....

A شامل حداقل یک مسیر با طول k است

B شامل حداقل یک مسیر با طول $k+1$ است

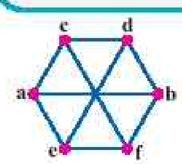
20 در گراف G می‌دانیم $\delta=3$ است. در این گراف ....

A مسیرهایی با طول ۱، ۲، ۳ بین رئوس متمایز وجود دارد

B مسیرهایی با طول ۳، ۴، ۵ بین رئوس متمایز وجود دارد

5 B 6 B 7 A 8 A 9 A 10 A 11 B 12 A 13 B 14 A 15 A 16 A 17 B 18 A 19 A 20 A

310 بین دو رأس a و b از گراف شکل مقابل، چند مسیر وجود دارد؟

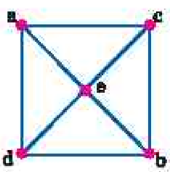


۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

311 در گراف G اگر $\delta = 3$ باشد، آنگاه کدام گزینه الزاماً درست نیست؟

۱) مسیری به طول ۲ دارد. ۲) مسیری به طول ۳دارد. ۳) مسیری به طول ۱دارد. ۴) مسیری به طول ۴ دارد.

312 بین دو رأس a و b از گراف شکل مقابل، چند مسیر وجود دارد؟



۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۰

313 در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e\}$، بین رأس‌های a و b فقط یک مسیر به طول ۴ وجود دارد. این گراف .... دارد.

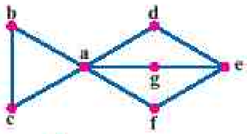
۱) حداقل ۵ یال ۲) حداقل ۴ یال ۳) دقیقاً ۵ یال ۴) دقیقاً ۴ یال

314 در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ بین رأس‌های a و b هیچ مسیری وجود ندارد. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۶

315 در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e\}$ حداکثر چند مسیر به طول ۲ بین رأس‌های a و b می‌تواند داشته باشد؟

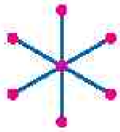
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



316 اگر x و y دو رأس از گراف مقابل باشند، آن‌گاه در این گراف چند مسیر به طول ۲ به شکل xay وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۳

۳) ۶ ۴) ۱۰



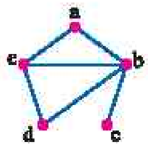
317 در گراف مقابل چند مسیر به طول ۲ بین رئوس مختلف گراف وجود دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۶

۳) ۵ ۴) ۱۵

318 در گرافی ساده، ۷ مسیر به طول صفر وجود دارد. این گراف حداکثر چند مسیر با طول یک می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) ۲۱



319 در گراف مقابل اختلاف تعداد مسیرهای به طول یک و به طول صفر کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

320 در گرافی ساده با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ بین هر دو رأس دلخواه دقیقاً یک مسیر وجود دارد. این گراف چند یال دارد؟

۱) دقیقاً ۴ یال دارد ۲) حداقل ۴ یال دارد ۳) دقیقاً ۵ یال دارد ۴) حداقل ۵ یال دارد

321 در گراف G از مرتبهٔ ۶ بین هر دو رأس دلخواه دقیقاً ۲ مسیر وجود دارد. این گراف چند یال دارد؟

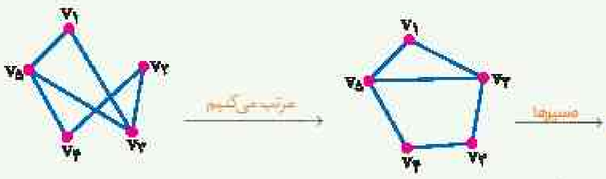
۱) دقیقاً ۶ یال ۲) حداقل ۶ یال ۳) حداکثر ۶ یال ۴) نامشخص

14 رسم گراف در حالات مختلف

اگر مجموعهٔ رأس‌ها و مجموعهٔ یال‌های یک گراف داده شود و دربارهٔ تعداد مسیرها در این گراف سؤالی پرسیده شود، باید گراف را رسم کنیم. بهترین راه برای رسم این است که رأس‌ها را گرد، دور هم بچینیم و یال‌های داده شده را به هم وصل کنیم.

در گراف G اگر $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ و $E=\{v_1v_3, v_2v_3, v_3v_5, v_5v_4, v_2v_4, v_1v_5\}$ باشد، مسیرهای بین v_1 و v_2 را نام ببرید.

ابتدا گراف را رسم کرده سپس مرتب می‌کنیم یعنی طوری رأس‌ها را جابه‌جا می‌کنیم که در گراف رسم شده یال‌ها همدیگر را قطع نکنند و آنگاه مسیرها را پیدا می‌کنیم:

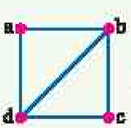


۱ $v_1v_3v_2$ ۲ $v_1v_3v_5v_4v_2$ ۳ $v_1v_5v_3v_2$ ۴ $v_1v_5v_4v_2$

اگر نمودار یک گراف به صورت توصیفی داده شود، [مثلاً تعداد یال‌ها و تعداد رأس‌ها داده شود] باید آن را رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات گراف پی ببریم.

در گرافی با ۴ رأس و ۵ یال، بین دو رأس از درجهٔ کوچکتر چند مسیر وجود دارد؟

ابتدا گراف را رسم می‌کنیم، حال با توجه به شکل باید مسیرهای بین a و c را پیدا کنیم:



۱ abc
۲ adc
۳ abdc
۴ adbc

۴ مسیر

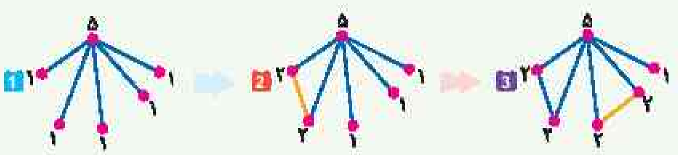
اگر درجهٔ رأس‌های یک گراف داده شود نیز باید گراف را رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات آن پی ببریم. بهترین راه برای رسم یک گراف از روی درجهٔ رأس‌های آن، این است که در گام اول رأس‌های با درجهٔ بزرگتر را رسم کنیم و در گام‌های بعدی، به ایجاد رأس‌های با درجهٔ کوچک‌تر بپردازیم.

برای رسم گرافی با درجه رئوس ۵،۲،۲،۲،۲،۱ ابتدا ۶ نقطه قرار می‌دهیم:

۱ در گام اول رأس با درجهٔ ۵ را رسم می‌کنیم.

۲ با وصل کردن دو رأس درجهٔ ۱، دو رأس درجهٔ ۲ حاصل می‌شود.

۳ با وصل کردن دو رأس درجهٔ ۱ دیگر، دو رأس درجهٔ ۲ حاصل می‌شود.



NEXT

335 کدام‌یک از گراف‌های زیر ناهمبند است؟

۱) K_1 ۲) C_5 ۳) ۱-منتظم مرتبهٔ ۴ ۴) P_2

336 یک گراف همبند که مجموع مرتبه و اندازهٔ آن ۸ باشد، با افزودن چند یال کامل می‌شود؟ (داخل - ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

337 یک گراف ناهمبند از مرتبهٔ ۷ حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۱۰

338 گراف ناهمبندی از مرتبهٔ ۷ بیش‌ترین یال ممکن را دارد. چند یال به این گراف اضافه کنیم تا کامل شود؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

339 در یک گراف همبند با کم‌ترین مرتبهٔ ممکن حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه برابر ۲۰ است، با حذف چند یال این گراف همبند و منتظم می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

340 در یک گراف همبند با اندازهٔ ۱۲، مرتبهٔ گراف چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

341 در گراف G از مرتبهٔ ۶ همسایگی باز هر رأس دارای ۳ عضو است، این گراف .... است.

۱) همبند و غیر منتظم ۲) همبند و منتظم ۳) ناهمبند و منتظم ۴) ناهمبند و غیر منتظم

342 در گراف G از مرتبهٔ ۶ اگر $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ ، $N_G[a]=\{a,b,c\}$ باشد، با کدام شرایط گراف قطعاً همبند است؟

۱) $N_G(b)=\{a,c\}$ ۲) $N_G[f]=\{f,e,c\}$ ۳) $N_G[c]=\{b,c\}$ ۴) $N_G(e)=\{f,d,c\}$

343 در یک گراف ناهمبند از مرتبهٔ ۷ و اندازهٔ ۱۵ چند رأس از درجهٔ ماکزیمم وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

344 در یک گراف مرتبهٔ ۶ دارای ۱۲ یال است. این گراف ....

۱) قطعاً ناهمبند است ۲) قطعاً همبند است

۳) می‌توان همبند یا ناهمبند باشد ۴) همبند است و با حذف یک یال، ناهمبند می‌شود

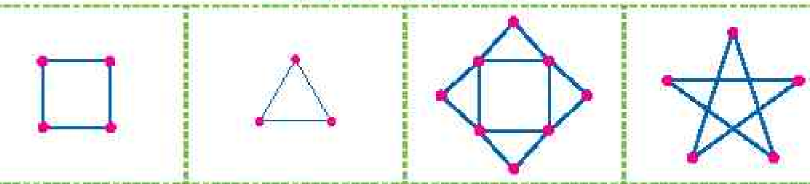
345 یک گراف ناهمبند از مرتبهٔ ۷ دارای ۱۰ یال است. این گراف حداکثر چند رأس تنها دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) این گراف قطعاً رأس تنها ندارد

18 گراف اویلری

اگر در یک گراف بتوان با آغاز از هر رأس دلخواه، از روی تمام یال‌ها دقیقاً یک بار گذشت و به رأس اولیه بازگشت، آن گراف را **اویلری** می‌نامند. در واقع می‌توان گفت گراف اویلری نوعی از گراف است که با شروع از یک نقطه و بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و بدون این‌که از هیچ خطی[یالی] دو بار عبور کنیم، می‌توانیم آن را رسم کنیم و به نقطهٔ شروع برگردیم.

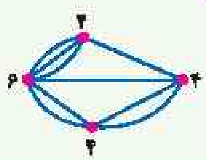
نمونه‌های از گراف‌های اویلری



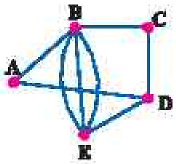
در هنگام عبور از تمام یال‌ها ممکن است از یک رأس چندین بار عبور کنیم که هیچ اشکالی ندارد.

شرط لازم و کافی برای **اویلری** بودن یک گراف همبند آن است که درجهٔ تمام رأس‌های آن **زوج** باشد.

این قضیه در گراف‌های غیرساده و چندگانه نیز صادق است. گراف مقابل یک گراف چند گانهٔ اویلری است:

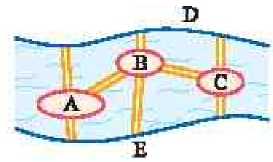


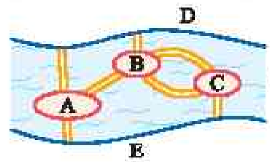
348 شکل زیر، ۵ منطقهٔ A, B, C, D, E را با ۸ پل به هم راه داده است. اگر مجاز باشیم از هر پل دقیقاً یک بار عبور کنیم، با شروع از منطقهٔ B، منطقهٔ پایان کدام است؟

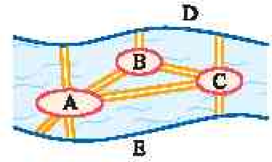


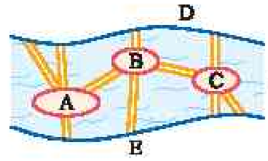
۱) نشدنی　　۲) B
۳) D　　۴) E

349 در کدام یک از نقشه‌های داده شده، با شروع از یکی از مناطق پنج‌گانه می‌توان از روی هر پل دقیقاً یک بار گذشت و به منطقهٔ اولیه رسید؟

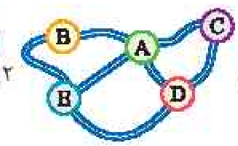
۱) 

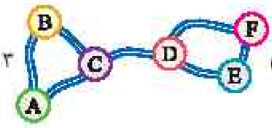
۲) 

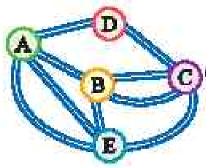
۳) 

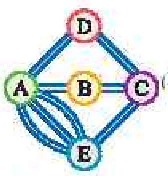
۴) 

350 در کدام یک از نقشه‌های داده شده نمی‌توان از یک نقطه شروع به حرکت کرد، از هر جاده دقیقاً یک بار عبور کرد و به نقطه‌ای غیر از نقطهٔ شروع رسید؟

۱) 

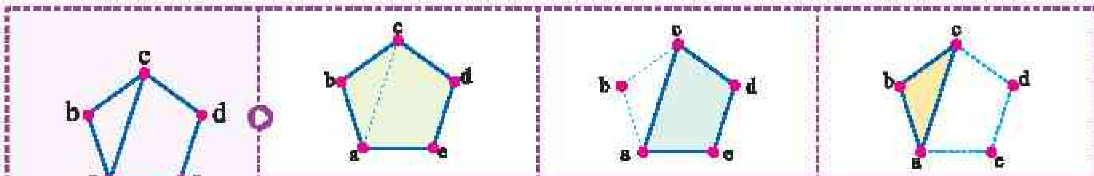
۲) 

۳) 

۴) 

20 دور

دنبالهٔ $v_1v_2v_3\cdots v_nv_1$ $(n \geq 3)$ از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم. در واقع دور نوعی مسیر است که رأس ابتدا و انتهای آن یکسان است. طول دور نیز همانند طول مسیر، تعداد یال‌های موجود در آن دور است.

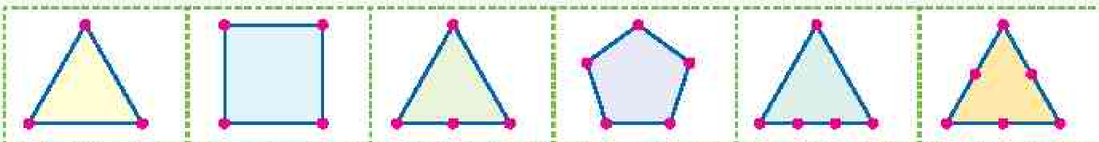


دور به طول ۳: abca	دور به طول ۴: acdea	دور به طول ۵: abcdea

در یک دور جهت چرخش یا محل شروع حرکت اهمیتی ندارد و آنچه که دو دور را از هم متمایز می‌کند فقط ترتیب قرار گرفتن رأس‌ها در دور است؛ به عبارت دیگر دو دور متفاوت، دورهایی هستند که حداقل یک یال متفاوت داشته باشند.

در گراف فوق دورهای abca و acba و bcab و cbac همگی یکسان هستند.

در یک گراف p رأسی، دور با طول کم‌تر از ۳ و با طول بیشتر از p وجود ندارد. در ضمن هر n ضلعی در یک گراف، فقط یک دور به طول n را مشخص می‌کند.

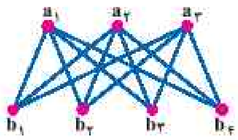


دور به طول ۶	دور به طول ۵	دور به طول ۵	دور به طول ۴	دور به طول ۴	دور به طول ۳

356 بازه‌های $(1,6)$، $(3,5)$، $(2,5)$، $(1,3)$ را در نظر بگیرید. دو رأس متناظر با بازه‌های (a,b)، (c,d) در گراف G مجاورند به شرط آن‌که اشتراک این دو بازه تهی نباشد، در این گراف چند دور وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

357 گراف مقابل چند دور به طول ۴ دارد؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۶ ۴) ۱۵

358 در گرافی با درجهٔ رئوس ۴،۳،۳،۲،۲ چند دور وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

359 در یک گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۹ تعداد دورها کدام عدد **نمی‌تواند باشد**؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

360 در یک گراف ناهمبند از مرتبهٔ ۷ همسایگی هر رأس دارای ۲ عضو است. این گراف چند دور دارد؟

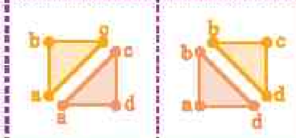
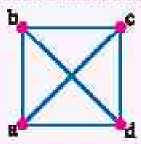
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

361 در گراف G همسایگی بستهٔ تمام رأس‌ها سه عضوی است. اگر مرتبهٔ گراف ۱۳ باشد، این گراف حداکثر چند دور دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

21 دور در گراف‌های کامل

گراف K_p ، به‌ازای هر n که در شرط $3 \le n \le p$ صدق کند، دارای دورهایی با طول n است.

دورهای به طول ۳	گراف K_4 دورهایی با طول ۳ و ۴ دارد	دورهای به طول ۴
		

اگر دقت کنید دورهای با طول ۴ در گراف K_4، رأس‌های یکسان دارند ولی هر کدام یالی دارد که دیگری ندارد.

تعداد دورهای با طول m در گراف K_p از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [m رأس از p رأس را انتخاب و با آن‌ها گردنبند می‌سازیم]

$$\boxed{\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}}$$

تعداد دورهای با طول ۳ در گراف K_6 برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times 1 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

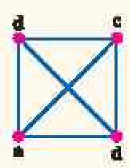
تعداد دورهای با طول ۵ در گراف K_5 برابر است با:

$$\binom{5}{5} \times \frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

مینی‌تست

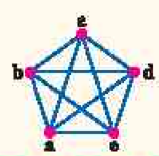
1 گراف K_4 دارای .... به طول ۴ است.

A) ۳ دور B) ۱ دور



2 گراف K_5 دارای .... به طول ۳ است.

A) ۱۰ دور B) ۱۵ دور



3 گراف k_5 دارای .... دور است که شامل همهٔ رأس‌ها باشد.

A) ۶ B) ۱۲

4 گراف k_4 دارای .... دور با طول فرد است.

A) ۳ B) ۴

5 گراف k_4 دارای .... دور با طول زوج است.

A) ۴ B) ۳

1 A 2 A 3 B 4 B 5 B

362 در یک گراف کامل، حاصل‌ضرب اندازه و مرتبهٔ آن ۵۰ می‌باشد. در این گراف چند دور با طول ۴ وجود دارد؟ (خارج - ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

363 در گراف کاملی تفاضل مرتبه و اندازهٔ گراف ۱۴ است، در این گراف چند دور با طول ۳ وجود دارد؟ (مشابه خارج - ۹۳)

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۲۸ ۴) ۲۱

364 در یک گراف سادهٔ ناهمبند و ۳-منتظم که دارای ۸ رأس باشد، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟ (خارج - ۸۷)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

365 در گراف ناهمبند G با درجهٔ رئوس ۳،۳،۳،۳،۱،۱ چند دور وجود دارد؟ (مشابه خارج - ۹۸)

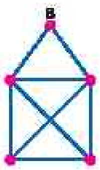
۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۶

366 در یک گراف با درجهٔ رأس‌های ۵،۴،۳،۳،۲،۱ ، تعداد دورها به طول ۳، کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

367 گراف ناهمبند ۳- منتظم دارای ۱۲ یال است، این گراف چند دور با طول ۴ دارد؟ (خارج - ۸۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸



368 در گراف مقابل چند دور وجود دارد که از رأس a عبور نکند؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

369 یک گراف ناهمبند با ۶ رأس و ۱۰ یال چند دور با طول فرد دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

370 در گراف K_5 تعداد دورهای با کدام طول از همه بیشتر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) همگی برابر است

371 گراف K_p دارای ۱۲ دور است که از همهٔ رئوس می‌گذرد، این گراف چند دور با طول ۳ دارد؟

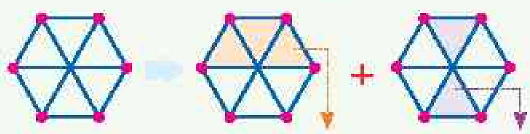
۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۵

22 دور در گراف‌های متقارن

در گراف هایی که کامل نیستند رابطهٔ بخصوصی برای محاسبهٔ تعداد دورها وجود ندارد. اما در پاره‌ای از گراف ها یک نظم و تقارن هندسی دیده می‌شود که شمارش تعداد دورها در آن را از گراف های عادی ساده‌تر می‌کند. در این حالت، هر نمونه دور را با توجه به تقارن مسئله، در تعداد تکرار آن ضرب می‌کنیم.

تعداد دورهای به طول ۴ را در هر یک از گراف‌های زیر پیدا کنید.

۱ [داخل - ۸۹]

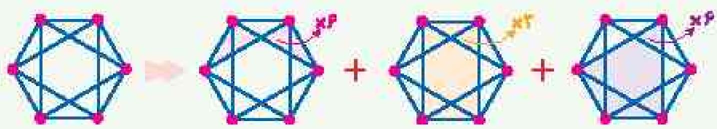


$=6+3=9$

روی هرکدام از ضلع‌های ۶ ضلعی ذوزنقه دیده می‌شود

روی هر دو ضلع مقابل ۶ ضلعی می‌توان چنین پاپیونی را دید

۲ [داخل - ۹۸]

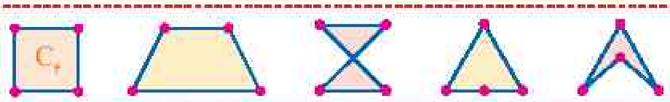


$=6+3+6=15$

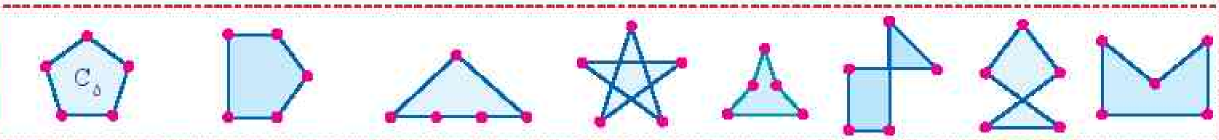
گرافی را که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد با C_n نمایش می‌دهیم.

1 گراف C_3 یا دور به طول ۳ همواره به شکل مثلث است:

2 گراف C_4 یا دور به طول ۴ را می‌توان به شکل‌های زیر در گراف‌ها مشاهده کرد:



3 گراف C_5 یا دور به طول ۵ را می‌توان به شکل‌های زیر در گراف‌ها مشاهده کرد:



پاسخنامه
تمام تشریحی
و تمام رنگی

ANSWERS

Password سُوگَند بِه قَلَم وَ آن چِه می نِویسَند

I ♥ gaj www.gaj.ir

g Other user

ENG

1 ۴ عبارت $4k+1$ مربع کامل است، زیرا:

$$4k+1=4(n(n+1))+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

2 ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ $(2k-1)+(2k+1)=4k$

۲ $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1=2k'+1$

۳ $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)=3k$

۴ $2k+(2k+2)=4k+2\neq 4k'$

3 ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ به‌ازای $n=6$ عبارت $2^n-1=63$ خواهد شد و مرکب است.

۲ مجموع دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ برابر صفر است که گنگ نیست.

۳ اگر $x=1$ و $y=1$ فرض شود $\sqrt{1}+\sqrt{1}\neq\sqrt{1+1}$

۴ این گزاره درست است و مثال نقضی ندارد.

4 ۴ اعدادی به شکل 2^n را نمی‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.

۱ $10=1+2+3+4$ ۲ $9=2+3+4$ ۳ $12=3+4+5$

5 ۲ به‌ازای $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ این نامساوی برقرار نیست

6 ۲ عبارت n^2+3n+5 همواره فرد است، برای اثبات n را یک‌بار فرد و یک‌بار زوج در نظر می‌گیریم:

۱ $n=2k\Rightarrow n^2+3n+5=(2k)^2+3(2k)+5=\underbrace{4k^2+6k+4}_{2k'}+1=2k'+1$

۲ $n=2k+1\Rightarrow n^2+3n+5=(2k+1)^2+3(2k+1)+5=\underbrace{4k^2+10k+8}_{2k''}+1=2k''+1$

7 ۳ هر عدد فرد را به صورت $a=2k+1$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$$

حال برای k دو حالت رُخ می‌دهد [اثبات با در نظرگرفتن همهٔ حالت‌ها]:

۱ $k=2q\Rightarrow a^2=8q(2q+1)+1=8k'+1$

۲ $k=2q+1\Rightarrow a^2=4(2q+1)(2q+2)+1=8k''+1$

8 ۳ گزینهٔ ۳ گزارهٔ درستی نیست که بتوان آن را با برهان خلف ثابت کرد، چون اگر a و b گنگ باشند $\sqrt{ab}$ می‌تواند گویا باشد:

$$a=\sqrt{5}-1,\ b=\sqrt{5}+1\Rightarrow\sqrt{ab}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{4}=2$$

9 ۲ برای اثبات این گزاره از روش اثبات مستقیم استفاده می‌شود.

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}=\frac{A}{B}$$

10 ۲ برای اثبات گنگ بودن اعداد از برهان خلف استفاده می‌کنیم کافی است فرض کنیم $\sqrt{2}$ گویا است و ...

11 ۲ طرفین نامساوی را نمی‌توان به توان زوج رساند بنابراین گزینهٔ ۲ نادرست است.

12 ۲

$$x^4+y^4\geq xy(x^2+y^2)\Rightarrow x^4-x^3y+y^4-xy^3\geq 0$$

$$x^3(x-y)-y^3(x-y)\geq 0\Rightarrow (x-y)(x^3-y^3)\geq 0$$

$$(x-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)\geq 0\Rightarrow (x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geq 0$$

13 ۱ همهٔ پارامترها را به طرف اول منتقل می‌کنیم:

$$a^2+b^2+c^2+m\geq 2(a+b+c)$$

$$a^2-2a+b^2-2b+c^2-2c+m\geq 0$$

$$(a-1)^2-1+(b-1)^2-1+(c-1)^2-1+m\geq 0$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+m-3\geq 0\Rightarrow m-3\geq 0\Rightarrow m\geq 3$$

14 ۴ طرفین نامساوی $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2xz+2yz$$

حال همه پارامترها را به طرف اول منتقل می‌کنیم و $2z^2$ ، $2y^2$ ، $2z^2$ را به شکل z^2+z^2 ، y^2+y^2 ، x^2+x^2 می‌نویسیم و خواهیم داشت:

$$(x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)\geq 0$$

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$

15 ۲ تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است خود صفر است:

$$n^3-n=0\Rightarrow n(n^2-1)=0\Rightarrow n=0,1,-1\xrightarrow{n\geq 0}n=0,1$$

16 ۱ تنها اعدادی که ۱ را می‌شمارند اعداد ۱ و ۱- هستند:

$$\begin{cases}n^2+2n=-1\Rightarrow n^2+2n+1=0\Rightarrow (n+1)^2=0\Rightarrow n=-1\\ n^2+2n=1\Rightarrow n^2+2n-1=0\Rightarrow \text{ریشهٔ صحیح ندارد}\end{cases}$$

17 ۲ گزینهٔ ۲ همواره درست است. دقت کنید که گزینه ۱ به‌شرطی درست است که $b\neq 0$ باشد و گزینه‌های ۳ و ۴ نیز به شکل غم‌انگیزی نادرست هستند.

18 ۳ تنها صفر بر اعداد بزرگ‌تر از خود بخش‌پذیر است، بنابراین باید $m^2-4=0$ باشد، در نتیجه $m=\pm 2$

19 ۴ در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ لاغر، لاغرتر و یا چاق، چاق‌تر شده است اما در گزینهٔ ۴ لاغر چاق شده و در عین حال نیز چاق هم لاغر شده که نادرست است.

20 ۴ در گزینهٔ ۴ لاغر، چاق شده و نادرست است.

21 ۴ در گزینهٔ ۴ طرفین به یک نسبت چاق شده‌اند (در c ضرب شده‌اند) و درست است.

22 ۴ در گزینه‌های ۱ و ۳ چاق، چاق‌تر شده و در گزینهٔ ۲ لاغر، لاغرتر شده است اما گزینهٔ ۴ هیچ‌کدام از این دو اتفاق رُخ نداده است.

23 ۳

$$ab\,|\,c^2\xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}}a\,|\,c^2\xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}}a\,|\,c^3$$

24 ۱ طبق قانون گفته شده در درسنامه فقط گزینهٔ ۱ درست است.

233 ۴ بررسی گزینه‌ها:

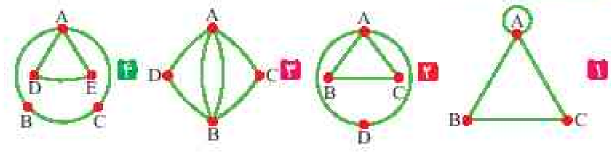
۱ بین دو رأس a و b ، یال‌های موازی وجود دارد؛ بنابراین گراف ساده نیست.

۲ یال‌های گراف، جهت‌دار هستند؛ بنابراین گراف ساده نیست.

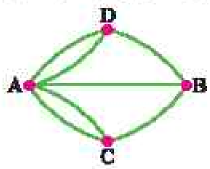
۳ رأس a دارای طوقه است؛ بنابراین گراف طوقه‌دار است و ساده نیست.

۴ گراف ساده است، چون بین هر دو رأس متمایز، بیش از یک یال وجود ندارد و همچنین طوقه و یال جهت‌دار در آن وجود ندارد.

234 ۴ بررسی گزینه‌ها:



235 ۳ از آن‌جا که در نقشهٔ داده شده، چهار ناحیهٔ A , B , C , D دیده می‌شود بنابراین گراف مورد نظر دارای ۴ رأس است و چون ۷ پل وجود دارد، این گراف دارای ۷ یال خواهد بود. برای رسم گراف مورد نظر، کافی است مطابق شکل مقابل ناحیه‌ها را با نقطه نشان دهیم و به جای هر پل، یک یال رسم کنیم.



236 ۳ رأس a در گراف داده شده به دو رأس دیگر وصل است در حالی که در گزینهٔ ۳ تنها به یک رأس وصل شده است.

237 ۱ در این گراف ۶ رأس و ۹ یال وجود دارد بنابراین $p(G)=۶$, $q(G)=۹$

در نتیجه: $q(G)-p(G)=۹-۶=۳$

238 ۳ $۰\le q\le \dfrac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow ۲۵\le\dfrac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow p(p-۱)\ge ۵۰$

$\xrightarrow{\text{آزمون و خطا}} \mathrm{Min}(p)=۸$

239 ۳ $q=۲p\Rightarrow ۲p\le\dfrac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow ۴p\le p(p-۱)\Rightarrow ۴\le p-۱$

$p\ge ۵\Rightarrow q\ge ۱۰$

240 ۱ ابتدا یک جدول صلیبی رسم می‌کنیم:

p	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	✓	✓	✓	✓	×	×	×

$\mathrm{Max}(q)=۳$

241 ۱ ابتدا یک جدول صلیبی رسم می‌کنیم:

p	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×

$\mathrm{Min}(p)=۴$

242 ۲ ابتدا یک جدول صلیبی رسم می‌کنیم:

p	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×

$P=\underbrace{۴,۵,\dots,۹}_{\text{۶ جواب}}$

243 ۱

p	۳۰	۱۵	۱۰	۶	۵	۳	۲	۱
q	۱	۲	۳	۵	۶	۱۰	۱۵	۳۰
	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×

$\mathrm{Min}(p)=۵$

244 ۲

p	۴۵	۱۵	۹	۵	۳	۱
q	۱	۳	۵	۹	۱۵	۴۵
	✓	✓	✓	✓	×	×

$\mathrm{Max}(q)=۹$

245 ۱

p	۷۲	۳۶	۲۴	۱۸	۱۲	۹	۸	۶	۴	۳	۱
q	۱	۲	۳	۴	۶	۸	۹	۱۲	۱۸	۳۶	۷۲
	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×

$\mathrm{Max}(q)=۱۲$

246 ۲

p	۴۸	۲۴	۱۶	۱۲	۸	۶	۴	۳	۲	۱
q	۱	۲	۳	۴	۶	۸	۱۲	۱۶	۲۴	۴۸
	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×

$\mathrm{Max}(q)=۸$

247 ۱ درجهٔ رأس‌های گراف به صورت زیر است:

$d(v_۱)=۵, d(v_۲)=۴, d(v_۳)=۳, d(v_۴)=۴, d(v_۵)=۳, d(v_۶)=۱$

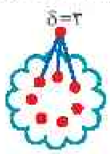
بنابراین گراف ۴ رأس فرد و دو رأس زوج دارد، در نتیجه:

۲ = ۲ − ۴ = تعداد رأس‌های زوج − تعداد رأس‌های فرد

248 ۴ در گراف داده شده درجهٔ رأس‌ها ۳ یا ۴ یا ۸ است بنابراین:

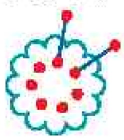
$\Delta(G)=۸$ و $\delta(G)=۳$ $\Rightarrow$ $\Delta(G)-\delta(G)=۸-۳=۵$

249 ۳ یک رأس را کنار می‌گذاریم تا با آن $\delta=۳$ را ایجاد کنیم. بقیهٔ رأس‌ها را پر از یال می‌کنیم و سپس رأس کنار گذاشته شده را با ۳ یال به مجموعهٔ ۷ رأسی پر از یال وصل می‌کنیم:



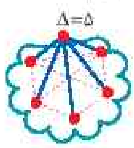
$\mathrm{Max}(q)=\binom{۷}{۲}+۳=۲۴$

250 ۳ دو رأس را کنار می‌گذاریم و بقیه را پر از یال می‌کنیم، سپس دو رأس درجهٔ ۱ را اضافه می‌کنیم:



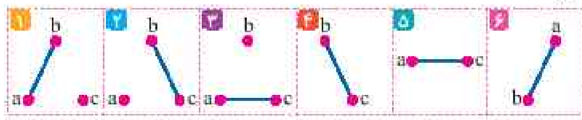
$\mathrm{Max}(q)=\binom{۷}{۲}+۱+۱=۲۳$

251 ۲ ابتدا یک رأس درجهٔ ۵ رسم می‌کنیم تا $\Delta=۵$ ایجاد شود. حال ۷ یال دیگر داریم که برای جا دادن آن‌ها باید حداقل ۵ رأس در نظر بگیریم:

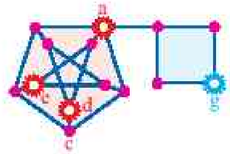


$\mathrm{Min}(p)=۶$

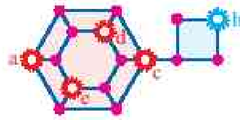
470 ۱ این گراف دارای ۶ زیرگراف است که هر کدام دارای دو ۲- مجموعهٔ متمایز هستند:



471 ۲ این گراف از اتصال گراف پترسن و گراف C_4 به‌دست آمده است و مجموعهٔ $\{a, d, c, g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است که مینیمال نیز محسوب می‌شود.



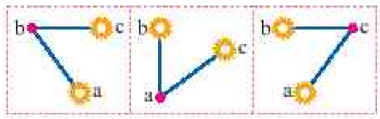
472 ۲ این گراف از اتصال یک گراف همیلتنی نوع دوم و یک گراف C_4 به‌دست آمده است و مجموعهٔ $\{a, c, e, d, h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است که مینیمال نیز محسوب می‌شود.



473 ۲ ابتدا n را به‌دست می‌آوریم: $n-4=9 \Rightarrow n=13$

بنابراین یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر $\left[\frac{13}{2}\right]=7$ عضو دارد.

474 ۲ تنها سه گراف مطابق شکل وجود دارد:

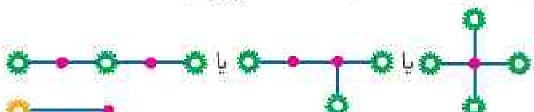


475 ۲

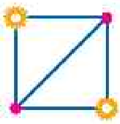
p	۲۰	۱۰	۵	۴	۲	۱
q	۱	۲	۴	۵	۱۰	۲۰

ناهمبند — ۱ — ۲ — غیرساده

۱ اگر $p=5$, $q=4$ باشد، سه گراف مختلف قابل رسم است:

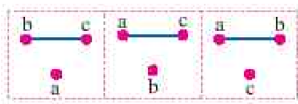


۲ اگر $p=4, q=5$ باشد، یک گراف قابل رسم است:

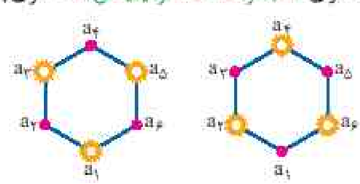


بنابراین یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر ۴ عضو دارد.

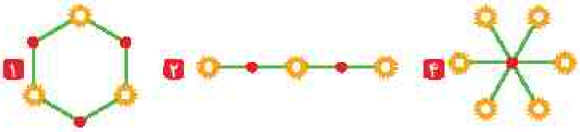
476 ۲ تنها سه گراف مطابق شکل وجود دارد:



477 ۲ این گراف دارای ۲ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه عضوی به صورت زیر است:



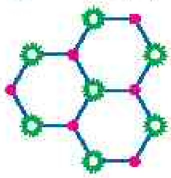
478 ۳ در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم نیز وجود دارد:



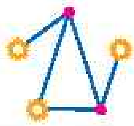
اما در گزینهٔ ۳ هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دو عضوی است.

در گراف‌های C_5 , C_4 , C_3 هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیز هست.

479 ۲ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر ۷ عضو دارد.

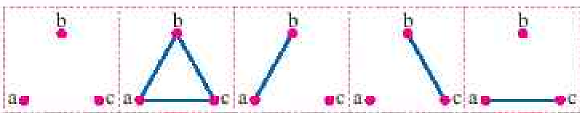


480 ۲ حداکثر ۳ عضو



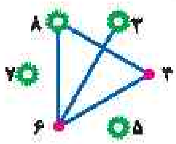
$18=3\times3\times2\times1\times1$

481 ۲ در گراف‌هایی به شکل زیر هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیز محسوب می‌شود:



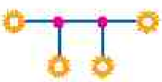
بنابراین ۵ گراف می‌توان ساخت که هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیز باشد.

482 ۲



$\sigma(G)=4$

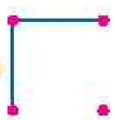
483 ۲



$\sigma(G)=3$

484 ۲ این گراف دو تیپ زیرگراف دارای که دارای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه عضوی یکتا هستند.

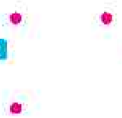
۱



یکی از رأس‌ها را به عنوان رأس تنها انتخاب می‌کنیم. تعداد $=\binom{4}{1}=4$

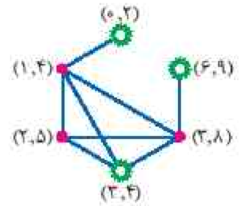
۸ = جواب

۲



سه رأس را از میان ۴ رأس انتخاب می‌کنیم. تعداد $=\binom{4}{3}=4$

۴۸۵ ۲ گراف را رسم می‌کنیم، در این صورت یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر ۳ عضو دارد:

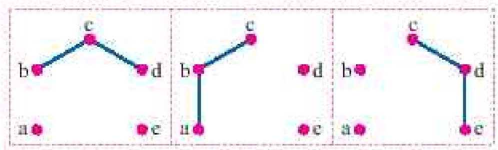


$\sigma(G)=3$

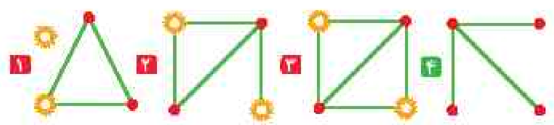
۴۸۶ ۳ این گراف دارای دو تیپ زیرگراف است که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی یکتا است که یک تیپ از آن مینیمم نیز هست:

1 تیپ اول انتخاب چهار رأس تنها که ۵ زیرگراف به این شکل وجود دارد که چون مینیمم نیز هستند قابل قبول نیستند.

2 تیپ دوم انتخاب دو رأس تنها که سه گراف به این شکل وجود دارد:

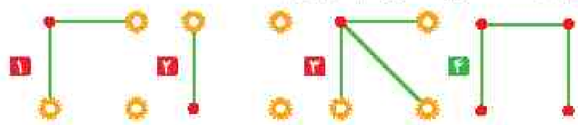


۴۸۷ ۴

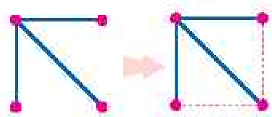


گزینهٔ ۴ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی و یک عضوی دارد.

۴۸۸ ۴ گراف همهٔ گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

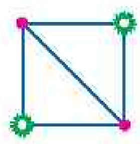


۴۸۹ ۳

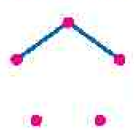


۳ دور

۴۹۰ ۲ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در این گراف حداکثر ۲ عضو دارد.

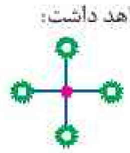


۴۹۱ ۳



$\gamma(G)=3$

۴۹۲ ۳ اگر گراف را به صورت زیر رسم کنیم حداکثر ۴ عضو خواهد داشت:



NOTE

Combinations فصل سوم

۴۹۳ ۱ منظور از اتومبیل غیربرقی، بنزینی یا گازوئیلی است. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد انواع اتومبیل برابر است با:

مدل، رنگ، حجم موتور، غیر برقی، اتومات

$4 \times 8 \times 3 \times 1 \times 2 = 192$

۴۹۴ ۳ پرتاب اول و سوم هرکدام ۳ حالت و پرتاب دوم ۴ حالت دارد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با: $3\times4\times3=36$

۴۹۵ ۲ فرض کنیم تعداد سکه‌ها برابر n باشد:

$6\times 2^n=384 \Rightarrow 2^n=\frac{384}{6}=64=2^6 \Rightarrow n=6$

۴۹۶ ۱ رُخ اول ۸ × ۸ مکان برای قرارگیری دارد، اما می‌دانیم هر مهرهٔ دیگری که در سطر یا ستون مربوط به آن قرار گیرد، مورد تهدید این رُخ قرار می‌گیرد بنابراین برای رُخ دوم ۷ × ۷ انتخاب وجود دارد. در نتیجه تعداد راه‌های قرارگیری برابر با ۴۹ × ۶۴ خواهد بود.

۴۹۷ ۱ در واقع این تاس همان ۶ حالت ممکن را دارد. چون وجه سفید هم امکان نشستن دارد، بنابراین اگر آن را سه‌بار پرتاب کنیم ۲۱۶=۶ × ۶ × ۶ حالت مختلف خواهد داشت.

۴۹۸ ۲ هر درایه دارای ۲ حالت است و چون ماتریس ۶ درایه دارد تعداد حالات ممکن طبق اصل ضرب برابر است با:

$\underbrace{2\times2\times\dots\times2}_{\text{۶ بار}}=2^6$

۴۹۹ ۴ درایه‌های قطر اصلی ۱ حالت دارند اما سایر درایه‌ها هرکدام ۲ حالت دارند:

$2\times2\times2\times2\times2\times2\times1\times1\times1=2^6$

۵۰۰ ۴ برای a هر یک از ارقام $\{1,2,3,\dots,9\}$ و برای b و c هر یک از ارقام $\{0,1,2,\dots,9\}$ را می‌توان در نظر گرفت: $9\times10\times10=9\times10^2$

۵۰۱ ۳ برای a، ۹ انتخاب و برای b، ۱۰ انتخاب وجود دارد؛ بنابراین تعداد اعداد ساخته‌شده برابر ۹۰=۱۰ × ۹ است.

۵۰۲ ۲ مسیرهایی که از A به B می‌توان رفت به‌صورت $(A\to C\ ,\ C\to B)$ یا به‌صورت $(A\to D\ ,\ D\to B)$ است. بنابراین تعداد راه‌های ممکن طبق اصل ضرب و اصل جمع برابر است با: $3\times1+2\times4=11$

۵۰۳ ۳ اگر در مسیر رفت از D عبور نکنیم تعداد راه‌های ممکن برای رفت برابر با ۱۳=۱+۲ × ۳ × ۲ است و اگر در برگشت از C عبور نکنیم تعداد راه‌های ممکن برای برگشت برابر با ۳=۱+۱×۲ است، بنابراین تعداد راه‌های ممکن برای رفت و برگشت برابر با ۳۹=۳ × ۱۳ است.

۵۰۴ ۲ برای رقم وسط هر یک از ارقام $\{0,3,6,9\}$ را باید انتخاب کنیم، رقم سمت چپ نیز صفر نمی‌تواند باشد: $9\times4\times10=360$

$$\binom{7}{4}-\binom{3}{3}\binom{2}{1}-\binom{3}{3}\binom{2}{1}=35-2-2=31$$

دقت کنید که در شکل داده شده ۴ نقطه روی یک خط راست وجود نداشت!!

597 ۲ هر سه نقطه‌ای که انتخاب کنیم تشکیل مثلث می‌دهند مگر آن‌که روی یک خط راست باشند:

$$\binom{9}{3}-8\binom{3}{3}=84-8=76$$

598 ۴ فرض کنیم یک صفحهٔ شطرنجی 4×4 داریم در این صورت تعداد مربع‌ها برابر با $4\times4+3\times3+2\times2+1\times1=30$ است. حال از این صفحهٔ 4×4 یک مربع 1×1 یک مربع 2×2 یک مربع 3×3 و یک مربع 4×4 کنده شده است.

بنابراین تعداد مربع‌ها برابر است با:

$$30-4=26$$

599 ۳ از یک صفحهٔ شطرنجی 4×4 یک مربع 1×1 دو مربع 2×2 دو مربع 3×3 و همچنین یک مربع 4×4 کنده شده است، بنابراین تعداد مربع‌ها برابر است با:

$$4^2+3^2+2^2+1^2-(1+2+2+1)=30-6=24$$

600 ۴ باید دو خط افقی و دو خط عمودی انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2}=10\times6=60$$

601 ۳ باید تعداد مربع‌ها را از تعداد مستطیل‌ها کم کنیم:

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2}-[4\times3+3\times2+2\times1]=60-20=40$$

602 ۲ دو کتاب تاریخ و دو کتاب ریاضی را انتخاب می‌کنیم سپس جواب را در جایگشت آن‌ها ضرب می‌کنیم به گونه‌ای که دو کتاب تاریخ کنار هم نباشد:

$$\binom{4}{2}\binom{3}{2}\times[4!-3!\times2!]=6\times3\times12=216$$

603 ۳ یک نفر را بین A و B قرار می‌دهیم و آن ۳ نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\binom{3}{1}\times3!\times3!=36$$

604 ۱ دو نفر را بین A و B قرار می‌دهیم و آن ۴ نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\binom{4}{2}\times2!\times3!\times2!=144$$

605 ۳ این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که ارقام متمایز باشند. بنابراین باید سه رقم از میان ارقام ۹ ,۷ ,۵ ,۳ ,۱ انتخاب کنیم که به $\binom{5}{3}=10$ طریق امکان‌پذیر است.

حال باید سه رقم را طوری قرار دهیم تا در عدد حاصل «صدگان > دهگان > یکان» شود که این کار فقط به یک طریق امکان‌پذیر است. پس تعداد اعداد سه‌رقمی با شرط فوق برابر است با:

$$\binom{5}{3}\times1=10$$

606 ۱ از بین ارقام ۹ ,... ,۲ ,۱ ,۰، باید دو رقم را برای جایگاه یکان و صدگان انتخاب کنیم. با داشتن دو رقم متمایز، فقط به یک طریق می‌توان یک عدد ساخت، به طوری که «رقم صدگان > رقم یکان» باشد. در ضمن رقم دهگان می‌تواند هر رقم دلخواهی باشد، پس:

$$\binom{10}{2}\times1\times10=450$$

607 ۴ باید یک رقم از میان چهار رقم زوج ۸ ,۶ ,۴ ,۲ و سه رقم دیگر را از میان پنج رقم فرد ۹ ,۷ ,۵ ,۳ ,۱ انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را محاسبه کنیم:

$$\binom{4}{1}\times\binom{5}{3}\times4!=4\times10\times24=960$$

608 ۲ باید دو رقم از میان ارقام $\{2,4,6,8\}$ و سه رقم دیگر را از میان ارقام $\{1,3,5,7,9\}$ انتخاب کنیم و سپس با ارقام انتخاب شده عدد پنج رقمی بسازیم:

$$\binom{4}{2}\times\binom{5}{3}\times5!=6\times10\times120=7200$$

609 ۱ یا باید سه رقم زوج و یک رقم فرد انتخاب کنیم یا چهار رقم زوج و سپس جایگشت آن‌ها را حساب کنیم:

$$\left[\binom{4}{3}\times\binom{2}{1}+\binom{4}{4}\right]\times4!=9\times24=216$$

610 ۴ ارقام ۳ ,۲ که انتخاب شده‌اند. پس باید یک رقم دیگر از میان ارقام ۵ ,۴ ,۳ انتخاب کنیم و با آن یک عدد سه رقمی بسازیم:

$$\binom{3}{1}\times3!=18$$

611 ۲ ابتدا ۲ تیم را از ۶ تیم انتخاب می‌کنیم حال می‌خواهیم هر دو تیم دوبار با هم مسابقه بدهند، بنابراین تعداد کل مسابقات برابر است با:

$$\binom{6}{2}\times2=30$$

612 ۲ هر سه رنگی که انتخاب کنیم، یک رنگ جدید ساخته می‌شود، پس تعداد کل رنگ‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{3}\times1=20$$

613 ۲ مجموعهٔ A به‌صورت $\{a,\{a\},\{b\},b,c\}$ است که یک مجموعهٔ ۵ عضوی است. بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های فاقد عضو b برابر است با:

$$1\times2\times2\times2\times2=16$$

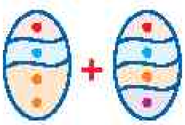
614 ۳ افرازهای دو عضوی A تنها به یک شکل کلی است:

$$N=\binom{3}{1}\binom{2}{2}=3\times1=3$$

615 ۲ افرازهای سه عضوی A تنها به یک شکل کلی است:

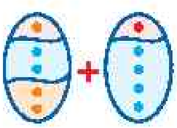
$$N=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{2!}=\frac{4\times3\times1}{2}=6$$

616 ۳ حداقل سه زیر مجموعه یعنی سه یا چهار زیر مجموعه:



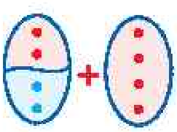
$$N=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{2!}+1=6+1=7$$

617 ۴ دو حالت کلی برای چنین افرازی وجود دارد:



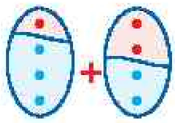
$$N=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}+\binom{5}{1}\binom{4}{4}=20$$

618 ۲ مجموعهٔ A به‌صورت $\{a,b,\{a,b\},c\}$ است.



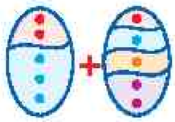
$$N=\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}+1=3+1=4$$

619 ۴ این افرازها به دو شکل کلی هستند:



$$N=\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}+\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}=۴+۳=۷$$

620 ۳ این افرازها به دو شکل کلی هستند:

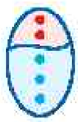


$$N=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}+\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۲}}{۳!}=۲۰$$

621 ۴ این افرازها به یک شکل کلی هستند:

$$N=\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۳!}=\frac{۱۵\times۶\times۱}{۶}=۱۵$$

622 ۳ این افرازها به یک شکل کلی هستند:



$$N=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}=۱۰$$

623 ۴ افراز مورد نظر به شکل زیر است که x نمی‌تواند a باشد و باید یکی از ۶ عضو دیگر مجموعه باشد:

$$N=\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳}}{۲!}=\frac{۶\times۲۰\times۱}{۲}=۶۰$$

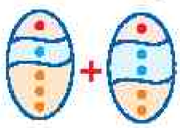
624 ۳ این افرازها به یک شکل کلی هستند:

$$N=\frac{\binom{۸}{۳}\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۲}}{۲!}=\frac{۵۶\times۱۰}{۲}=۲۸۰$$

625 ۳ مجموعه $A_۴$ یک مجموعهٔ ۵ عضوی است زیرا:

$$A_۴=\{m\in\mathbb{Z}:m\geq-۳,۲^m\leq۳\}=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\}$$

بنابراین تعداد افرازهای ۳ عضوی آن به صورت زیر به دست می‌آید:



$$N=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}}{۲!}+\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}=۲۵$$

626 ۲ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۷$ را پیدا کنیم که برابر با:

$$\binom{۷+۳}{۳}=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$$

627 ۴ باید $\binom{۷+۲}{۲}=\binom{۲+k-۱}{k-۱}$ باشد، در نتیجه:

$$\binom{k+۱}{k-۱}=\binom{۹}{۲}\Rightarrow\binom{k+۱}{۲}=\binom{۹}{۲}\Rightarrow k+۱=۹\Rightarrow k=۸$$

628 ۳ باید تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۱۱$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$$

629 ۲ باید تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۸$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{۸-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

630 ۳ ابتدا $x_۱,x_۲$ را به دست می‌آوریم سپس این اعداد را در معادله جایگذاری کرده و تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ حاصل را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{x_۱}=\frac{۲}{x_۲}=۲\Rightarrow x_۱=۴,x_۲=۱\Rightarrow x_۳+x_۴+x_۵=۱۰\Rightarrow\binom{۱۰+۲}{۲}=۶۶$$

631 ۴ باید تعداد جواب‌های طبیعی $x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۹$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\binom{۹-۱}{۵-۱}=۷۰$$

632 ۴ باید تعداد جواب‌های طبیعی را از تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۶$ کم کنیم:

$$\binom{۶+۳}{۳}-\binom{۶-۱}{۴-۱}=۸۴-۱۰=۷۴$$

633 ۲ ابتدا از هر نوع گل ۲ شاخه برمی‌داریم، در نتیجه ۷ شاخهٔ گل می‌ماند، بنابراین کافیست تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۷$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\binom{۷+۳}{۳}=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$$

634 ۲ باید تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۱۰$ را با شرایط $۱\leq x_i\leq۸$ به دست آوریم یعنی متغیرها باید حداقل برابر «۱» باشند. بنابراین باید تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ فوق را پیدا کنیم:

$$\binom{۱۰-۱}{۳-۱}=۳۶$$

دقت کنید در این شرایط به طور ناخودآگاه هیچ‌کدام از متغیرها نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۸ باشد و حداکثر مقدار ممکن برای هرکدام از آن‌ها ۸ است و مطرح کردن کران بالا برای متغیرها هیچ تأثیری در فرآیند حل مسئله ندارد و صرفاً جنبهٔ تزئینی دارد.

635 ۲ وقتی مجموع سه متغیر صحیح و نامنفی برابر ۱۰ است خواه ناخواه همگی آن‌ها کوچک‌تر مساوی ۱۰ هستند بنابراین باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۱۰$ را با شرط $x_۳\geq۳$ ، $x\geq۲$ ، $x\geq۱$ پیدا کنیم که برای این منظور $۱+۲+۳=۶$ پرتقال از ۱۰ پرتقال موجود را کنار می‌گذاریم و ۴ پرتقال دیگر را بین ۳ نفر توزیع می‌کنیم، در نتیجه تعداد راه‌های ممکن برابر با:

$$\binom{۴+۲}{۲}=۱۵$$

636 ۴ کافیست (۳-) پرتقال به نفر اول و (۱-) پرتقال به نفر دوم و (۲-) پرتقال به نفر سوم بدهیم و $۰-(-۳)-(-۱)-(-۲)=۶$ پرتقال حاصل را بین ۳ نفر توزیع کنیم که تعداد راه‌ها برابر است با:

$$\binom{۶+۲}{۲}=۲۸$$

637 ۳ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ را با این شرط که دقیقاً دو تا از متغیرها صفر باشد پیدا کنیم، فرض کنیم $x_۱=x_۲=۰$ باشد، در این صورت باید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $۰+۰+x_۳+x_۴=۸$ را پیدا کنیم و سپس جواب به‌دست آمده در تعداد حالاتی که می‌توان دو متغیر از چهار متغیر را برای صفر شدن انتخاب کرد، ضرب کنیم:

$$\binom{۸-۱}{۲-۱}\times\binom{۴}{۲}=۷\times۶=۴۲$$

638 ۲ وقتی جمع سه متغیر که همگی بزرگ‌تر مساوی «۱» هستند برابر ۸ است به‌طور ناخودآگاه هیچ کدام نمی‌توانند از ۶ بیشتر باشند [حداکثر هر متغیر در این شرایط برابر «۶» است] بنابراین کافیست تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ داده شده را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{۸-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

آزمون‌های جامع کنکور

Comprehensive Test

Rene Descartes
1650-1596

آزمون جامع ۱ سراسری ریاضی ـ داخل ۹۹

دهم + یازدهم + دوازدهم

۱. اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $B \subseteq A$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B-A'=A$ ۲) $A-B'=A$

۳) $A\cap B'=\varnothing$ ۴) $B\cap A'=\varnothing$

۲. مجموعهٔ $(A-B)\cup((B\cap C)'\cap((B'\cup A)-B))$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $A\cup B'$ ۲) $A\cap B'$

۳) A ۴) B'

۳. در مجموعه‌های چهار عضوی $A=\{x+2,1,4,y\}$ ، $B=\{5,7,z,t-1\}$ ، فرض کنید $A\times B=B\times A$ باشد. تعداد مجموعه‌های به صورت $\{(x,y),(z,t)\}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

۴. کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ است؟

۱) $(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$ ۲) $(p\vee q)\vee\sim(p\wedge q)$

۳) $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$ ۴) $(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$

۵. تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ۲) ۹۵۲

۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

۶. تعداد جملات در بسط عبارت $(a+b+c)^{12}$، کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۷۸

۳) ۸۴ ۴) ۹۱

۷. در جعبه‌ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا مطمئن باشیم، حداقل ۴ کتاب، هم موضوع است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹

۳) ۸ ۴) ۷

۸. به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$

۳) $\frac{7}{15}$ ۴) $\frac{8}{15}$

۹. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روشده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعهٔ مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟

۱) $A \subset B'$ ۲) $A - B' = \varnothing$
۳) $A \cap B' = A$ ۴) $(A \cup B)' = \varnothing$

۲. مجموعهٔ $(A-(A\cap B'))\cup(B\cap(A\cap B)')$ با کدام مجموعه، برابر است؟

۱) A ۲) B
۳) A' ۴) B'

۳. اگر $A=[1,4]$, $B=(-1,3]$ باشند. مساحت نمودار $A\times A - B\times B$ در صفحهٔ مختصات، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۷ ۴) ۶

۴. کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow \sim q)\wedge(p\vee q)$ است؟

۱) p ۲) q
۳) $p\wedge q$ ۴) $p\Rightarrow q$

۵. تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیرتکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

۱) ۱۸۴۸ ۲) ۱۷۹۲
۳) ۱۷۴۸ ۴) ۱۶۵۸

۶. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z+t=11$، به شرط آن‌که $x<5$ باشد، کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰
۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

۷. حداقل چند عدد از مجموعه اعداد طبیعی متوالی $\{1,2,3,\dots,30\}$ انتخاب شود، تا مطمئن باشیم بین آن‌ها حداقل دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک، وجود دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲
۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۸. یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

۱) $\frac{13}{36}$ ۲) $\frac{51}{108}$
۳) $\frac{91}{216}$ ۴) $\frac{31}{72}$

۹. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{15}{36}$

۱۰. در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

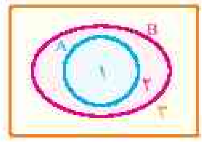
۱) $\frac{20}{27}$ ۲) $\frac{34}{45}$
۳) $\frac{38}{45}$ ۴) $\frac{23}{27}$

۱۱. در دو پیشامد مستقل A, B، اگر $P(A\cap B)=0/1$, $P(A\cup B)=0/6$ و با فرض $P(B')>P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳
۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

داخل ـ ۹۹

1 (۴) یک شکل متناسب با $A\subseteq B$ رسم می‌کنیم، سپس به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



(۱) $B-A' \Rightarrow \{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1\}=A$

(۲) $A-B' \Rightarrow \{1\}\cup\{3\}=\{1\}=A$

(۳) $A\cap B'=\{1\}\cap\{3\}=\varnothing$

(۴) $B\cap A' \Rightarrow \{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}\neq\varnothing$

2 (۴) می‌دانیم طبق $A-B=A\cap B'$ است و همچنین طبق قانون جذب $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$ است. بنابراین:

$$(\underbrace{A-B}_{A\cap B'})\cup(\underbrace{(B\cap C)'}_{B'\cup C'}\cap(\underbrace{(B'\cup A)-B}_{(B'\cup A)\cap B'=B'}))$$

$$=(A\cap B')\cup(\underbrace{(B'\cup C')\cap B'}_{\text{جذب}})=(A\cap B')\cup B'=B'$$

3 (۳) می‌دانیم اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند و $A\times B=B\times A$ باشد، آنگاه $A=B$ خواهد بود، بنابراین حالات زیر قابل تصور است:

(۱) $\begin{cases}x+2=5\\ y=7\\ z=1\\ t-1=4\end{cases}$ (۲) $\begin{cases}x+2=5\\ y=7\\ z=4\\ t-1=1\end{cases}$ (۳) $\begin{cases}x+2=7\\ y=5\\ z=1\\ t-1=4\end{cases}$ (۴) $\begin{cases}x+2=7\\ y=5\\ z=1\\ t-1=4\end{cases}$

بنابراین، تعداد مجموعه‌های به شکل $\{(x,y),(z,t)\}$ برابر است با ۴ است.

4 (۱) می‌دانیم $p\Leftrightarrow q\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$ بنابراین:

$$p\Leftrightarrow q\equiv\sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)\equiv(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$$

5 (۲) چون تکرار ارقام مجاز نیست، باید مسئله را به دو قسمت تقسیم کنیم، یعنی تعداد اعداد مضرب ۵ و مختوم به صفر را حساب کنیم و یک‌بار تعداد اعداد مضرب ۵ و مختوم به ۵ را:

$$9\times8\times7\times\underset{\{0\}}{1}+8\times8\times7\times\underset{\{5\}}{1}=504+448=952$$

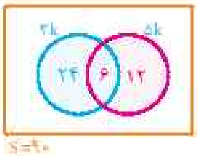
6 (۴) باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=12$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\binom{12+2}{2}=\binom{14}{2}=\frac{14\times13}{2}=91$$

7 (۲) بدترین حالات ممکن حالتی است که ۳ کتاب ادبی، ۳ کتاب هنر [که البته ۳ کتاب هنر نداریم و ۲ کتاب هنر برمی‌داریم] و ۳ کتاب ریاضی برداریم که در این حالت با این‌که ۸ کتاب برداشته‌ایم ولی هنوز ۴ کتاب هم‌موضوع نداریم. حال اگر یک کتاب دیگر برداریم این کتاب به یقین یا ریاضی است یا ادبی است و ما حداقل ۴ کتاب هم موضوع داریم، بنابراین حداقل تعداد کتاب‌ها برابر است با:

$$n=(3+2+3)+1=9$$

8 (۳) تعداد اعداد دورقمی برابر با $n(S)=9\times10=90$ است. حال یک نمودار رسم می‌کنیم و داریم:



$$P(A)=\frac{24+6+12}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$

9 (۱) فضای نمونه تعداد حالاتی است که مجموع سه تاس فرد آمده که برابر با نصف کل حالات است یعنی:

$$n(S)=\frac{1}{2}\times6\times6\times6=108$$

حال باید ببینیم در چند حالت از این ۱۰۸ حالت حداقل یکی از تاس‌های روشده «۲» است، ابتدا تعداد کل حالاتی که حداقل یکی از تاس‌ها «۲» باشد را پیدا می‌کنیم:

$$n=6\times6\times6-5\times5\times5=91$$

حال یکی از ۹۱ حالت $(2,2,2)$ است و از ۹۰ حالت باقی‌مانده دقیقاً در نصف حالات مجموع زوج و در نصف دیگر حالات مجموع فرد است. یعنی در ۴۵ حالت مجموع فرد و حداقل یکی ۲ است، بنابراین حاصل این احتمال شرطی برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{45}{108}=\frac{5}{12}$$

10 (۲)

از ظرف اول هر دو مهره‌ای که خارج کنیم الزاماً سفید است و احتمال لااقل یک سیاه صفر است، از ظرف دوم هر دو مهره‌ای که خارج شود حتماً سیاه است و احتمال لااقل یک سیاه برابر ۱ است و از ظرف سوم اگر دو مهره خارج کنیم در صورتی حداقل یکی سیاه است که هر دو سفید نباشد:

$$P=\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}\right)=0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{18}$$

11 (۲) ابتدا به کمک $P(B|A)$ حاصل $P(A\cap B)$ را به دست می‌آوریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow 0.25=\frac{P(B\cap A)}{0.4}\Rightarrow P(B\cap A)=0.1$$

حال با معلوم بودن $P(A\cap B)$ می‌توانیم احتمال شرطی خواسته شده را به‌دست آوریم:

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{1-P(A)}=\frac{0.3-0.1}{1-0.4}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$$

12 (۳) ظاهراً نموداری که داده شده مربوط به درصد فراوانی نسبی است، بنابراین:

$$\bar{x}=\frac{\sum p_ix_i}{100}=\frac{\overbrace{7\times12+12\times18+13\times35+17\times10+19\times25}^{1400}}{100}=14$$